

ТЕТРАДЬ

9

Чернева И.М.

Смешанный метод

Полная система уравнений стержневой системы



Санкт-Петербург

2010г

*Чернева И.М. – ассистент, доцент кафедры строительной механики
ЛИИЖТа, кафедры прочности материалов и конструкций ПГУПСа в 1962-
1996гг*

© Чернева И.М., 2013

Оглавление

9.0 Предисловие.....	4
9.1 Комбинированный способ расчета стержневых систем	6
9.2 Смешанный метод расчета стержневых систем.....	10
9.2.1 Пример расчета рамы смешанным методом	10
9.2.2 Коэффициенты, свободные члены и канонические уравнения смешанного метода в общем случае расчета рам	14
9.2.3 Вывод канонических уравнений смешанного метода на основе смешанного вариационного принципа.....	16
9.2.4 Энергетический способ определения коэффициентов и свободных членов разрешающих уравнений смешанного метода.....	19
9.2.5 Пример определения коэффициентов системы уравнений смешанного метода энергетическим способом.....	20
9.3 Полная система уравнений для плоской рамы с жесткими узлами.....	22
9.3.1 Расчетная схема рамы с жесткими узлами, используемая для построения полной системы уравнений.....	22
9.3.2 Параметры, определяющие напряженно-деформированное состояние плоской рамы с жесткими узлами	23
9.3.3 Статические уравнения: уравнения равновесия узлов стержневой системы.....	26
9.3.4 Геометрические уравнения: связь обобщенных деформаций стержневых элементов и узловых перемещений.....	30
9.3.5 Определяющие уравнения, связывающие обобщенные деформации и независимые статические параметры стержневых элементов.....	32
9.3.6 Граничные условия: условия закрепления стержневой конструкции	34
9.3.7 Набор определяющих параметров и полная система уравнений, описывающая напряженно-деформированное состояние стержневой конструкции	35
9.3.8 Разрешающие уравнения полной системы уравнений в усилиях. Уравнения метода сил.....	37
9.3.9 Разрешающие уравнения полной системы уравнений в перемещениях	41
9.3.10 Разрешающие уравнения полной системы уравнений в перемещениях в форме метода сложения жесткостей	43
Список литературы.....	46

9.0 Предисловие

Материал данной тетради завершает знакомство с классическими алгоритмами статики стержневых систем, к которым кроме канонического алгоритма метода сил и канонического алгоритма метода перемещений относятся комбинированный способ и смешанный метод в канонической форме.

Комбинированным способом называется способ расчета симметричной конструкции, который состоит в разложении задачи на две задачи – симметричную и кососимметричную и в использовании для решения одной из задач метода сил, а для решения другой задачи метода перемещений. Комбинированный способ применяется в том случае, если его использование обеспечивает понижение общей размерности задачи, то есть суммарное число неизвестных при решении двух задач оказывается меньшим, чем число неизвестных при решении исходной задачи только методом сил или только методом перемещений. **В разделе 9.1** комбинированный способ рассматривается на примере расчета симметричной рамы.

При использовании смешанного метода группа основных неизвестных задачи, для определения которых составляется разрешающая система уравнений, состоит из обобщенных усилий в ряде сечений и обобщенных перемещений ряда узлов конструкции. Остальные неизвестные усилия и перемещения определяются после решения системы уравнений смешанного метода по уже найденным основным неизвестным. **В разделе 9.2** рассматривается вариант смешанного метода, известный, как метод Гвоздева, и основанный на использовании основной системы конструкции. Основная система смешанного метода строится путем удаления связей на части конструкции, как это делается при построении основной системы метода сил, и путем введения дополнительных связей на другой части конструкции, как это делается при построении основной системы метода перемещений. Соответственно за неизвестные задачи принимаются усилия в отброшенных связях и перемещения по направлению дополнительно введенных связей. Разрешающие уравнения смешанного метода при таком подходе строятся в форме канонических уравнений подобно тому, как это делается при построении разрешающих уравнений метода сил и метода перемещений.

Уравнения смешанного метода вначале получены из простых механических соображений, затем приведен вывод канонических уравнений смешанного метода, исходя из смешанного вариационного принципа. Для определения коэффициентов и свободных членов уравнений используется статический, геометрический и энергетический способы.

Наиболее общий подход к построению алгоритмов смешанного метода состоит в составлении и решении полной системы уравнений стержневой конструкции. Неизвестными являются обобщенные усилия в стержнях, соответствующие им деформации стержней и обобщенные узловые перемещения. В состав полной системы уравнений стержневой конструкции входят уравнения равновесия узлов, уравнения связи между обобщенными перемещениями узлов и обобщенными деформациями стержней и определяющие уравнения, связывающие обобщенные усилия в стержнях и деформации. В результате решения полной системы линейных алгебраических уравнений в принципе сразу определяются все неизвестные. Поэтому метод расчета стержневой конструкции путем решения полной системы уравнений уже сам по себе явился бы смешанным методом. Однако такой метод обычно не используется на практике, поскольку полная система уравнений при расчете реальных конструкций имеет слишком большой размер и свойства, затрудняющие ее решение.

Решение полной системы выполняется путем исключения части неизвестных с помощью части уравнений. Оставшиеся уравнения относительно остальных неизвестных называются разрешающими уравнениями. Если на первом этапе исключают деформации стержней и перемещения узлов, то получают разрешающие уравнения в усилиях. Исключая далее часть усилий с помощью уравнений равновесия, получают уравнения относительно части усилий – “лишних неизвестных”, которые являются уравнениями метода сил. Если вначале исключают усилия и деформации стержней, то получают разрешающие уравнения в перемещениях – уравнения метода перемещений.

В принципе, на первом этапе можно исключить любой набор неизвестных усилий, деформаций и перемещений. При этом будут получаться различные варианты разрешающих уравнений смешанного метода. Работа по созданию алгоритмов смешанного метода ведется различными группами расчетчиков, так что нельзя исключать в дальнейшем возможность построения и эффективного использования таких алгоритмов. Однако пока нам неизвестны удобные алгоритмы построения уравнений смешанного метода на базе полной системы уравнений стержневой системы..

Ранее в *Тетради 5*, посвященной расчету ферм, показана полная система уравнений для плоской фермы. Классы параметров, определяющих напряженно-деформированное состояние конструкции, структура и матричная форма записи полной системы уравнений сохраняются и в случае стержневой системы общего вида. Однако необходимость учета способов соединения стержней в узлах, учета размеров узлов, учета наряду с узловыми силами нагрузок, приложенных по длине стержней, приводит к увеличению размерности задачи, усложнению коэффициентов и свободных членов уравнений и вносит особенности в алгоритм их формирования. В связи громоздкостью получения общей системы уравнений для конструкции общего вида в *разделе 9.3* подробно рассмотрено построение полной системы уравнений только для плоской рамы с жесткими узлами, нагруженной узловыми нагрузками. Демонстрируется получение разрешающих уравнений полной системы в усилиях в форме уравнений метода сил, а также в перемещениях в форме уравнений метода перемещений.

9.1 Комбинированный способ расчета стержневых систем

Пример 9.1

Приведенный ниже пример демонстрирует возможность расчета симметричной рамы комбинированным способом, который заключается в использовании для расчета одной и той же конструкции одновременно метода сил и метода перемещений. Представленная на рис.9.1 симметричная рама три раза статически и три раза кинематически неопределима. При расчете рамы на произвольную нагрузку, как методом сил, так и методом перемещений в каждом случае приходится решать задачу с тремя неизвестными параметрами. Между тем, если разложить нагрузку на симметричную и кососимметричную и решать симметричную задачу методом перемещений, а кососимметричную методом сил, то каждая из этих двух задач оказывается задачей с одной неизвестной. Комбинированное применение метода перемещений и метода сил при расчете данной конструкции дает очевидное преимущество.

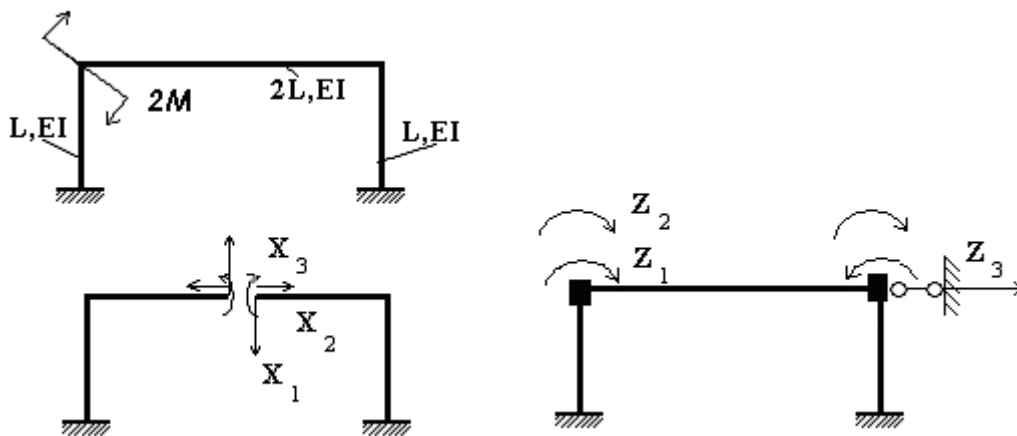


Рис.9.1 Основная система и неизвестные при расчете симметричной рамы смешанным способом

Перейдем к решению предложенной задачи.

Рассчитаем раму на симметричную нагрузку методом перемещений. При симметричной нагрузке деформация рамы симметрична относительно оси симметрии рамы, поэтому углы поворота симметрично расположенных жестких узлов равны по величине, противоположны по направлению. Горизонтальное перемещение узлов в силу симметрии отсутствует. Задача сводится к определению одного неизвестного угла поворота Z_1 .

На рис.9.2 приведены “единичное” и “грузовое” состояния основной системы при расчете рамы методом перемещений, а также приведена “единичная” эпюра. “Грузовая” эпюра отсутствует, поскольку рама нагружена только узловой нагрузкой.

На этом же рисунке показаны вырезанные из конструкции узлы, из равновесия которых определяются коэффициент r_{11} и свободный член R_{P1} канонического уравнения метода перемещений:

$$r_{11} = \frac{2EI}{L} + \frac{4EI}{L} = \frac{6EI}{L}; \quad R_{P1} = -M.$$

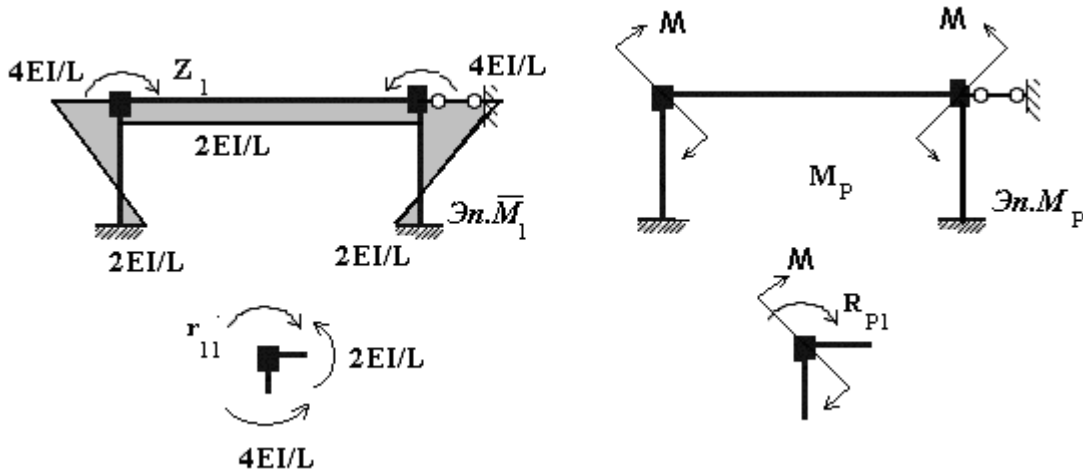


Рис.9.2 “Единичное” и “грузовое” состояние основной системы метода перемещений.

Решаем единственное уравнение метода перемещений и определяем неизвестный угол поворота:

$$r_{11}Z_1 + R_{P1} = 0 \rightarrow Z_1 = -R_{P1} / r_{11} = M \frac{L}{6EI}.$$

Эпюра моментов при симметричной нагрузке построена в соответствии с формулой $M^C(s) = \bar{M}_1 Z_1 + M_{P1}^C(s)$ и имеет следующий вид:

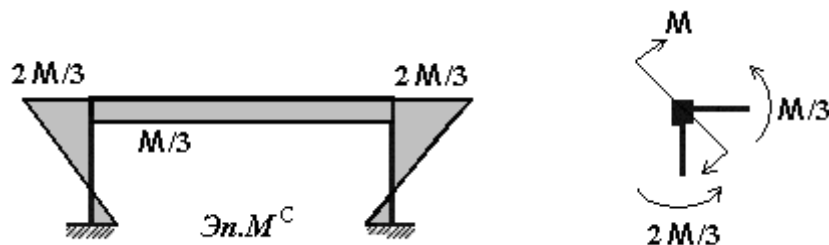


Рис.9.3 Эпюра моментов симметричной задачи

Равновесие свободного узла свидетельствует о правильности решения задачи.

Рассчитаем далее раму на кососимметричную нагрузку методом сил. При кососимметричной нагрузке в сечении рамы, проведенном на оси ее симметрии, отсутствуют изгибающий момент и продольная сила. Единственной лишней

неизвестной оказывается поперечная сила X_1 в этом сечении. На рис.9.4 приведены “единичная” и “грузовая” эпюры изгибающего момента в основной системе метода сил:

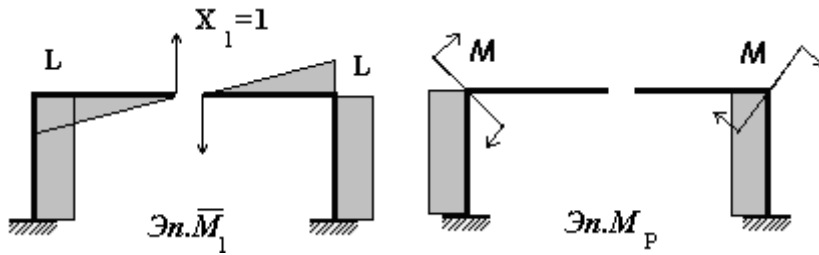


Рис.9.4 “Единичное” и “грузовое” состояние основной системы метода сил

Определяем коэффициент δ_{11} и свободный член Δ_{p1} единственного уравнения метода сил:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot L \cdot \frac{2}{3} L + L \cdot L \cdot L \right) = \frac{4L^3}{3EI}; \quad \Delta_{p1} = -M \frac{L \cdot L}{EI}.$$

Решаем уравнение метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{p1} = 0 \rightarrow X_1 = -\Delta_{p1} / \delta_{11} = \frac{3}{4L} M.$$

Эпюра изгибающего момента при кососимметричной нагрузке построена в соответствии с формулой $M^{KC}(s) = \bar{M}_1 X_1 + M_{p1}^{KC}(s)$ и представлена на следующем рисунке:

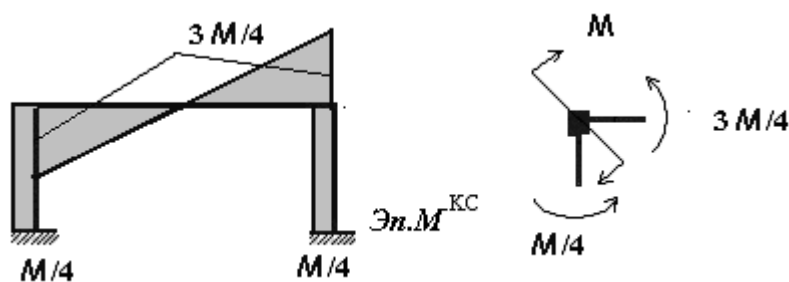


Рис.9.5 Эпюра изгибающего момента при кососимметричной нагрузке

Деформационная проверка метода сил свидетельствует о правильности решения кососимметричной задачи:

$$M^{KC} \cdot \bar{M}_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} M \cdot L \cdot \frac{2}{3} L - \frac{1}{4} M \cdot L \cdot L \equiv 0.$$

Окончательная эпюра изгибающего момента получается суммированием эпюр M^C и M^{KC} и имеет показанный на следующем рисунке вид:

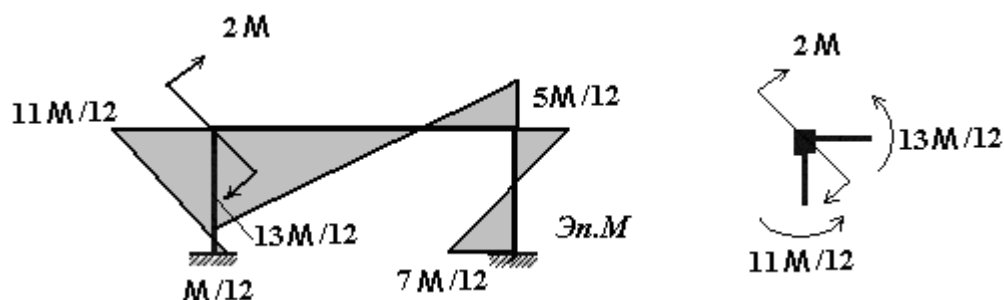


Рис.9.6 Окончательная эпюра изгибающего момента при нагрузке

Полученное распределение изгибающих моментов в симметричной раме под действием приложенного в одном из свободных узлов сосредоточенного момента обеспечивает равновесие свободных узлов.

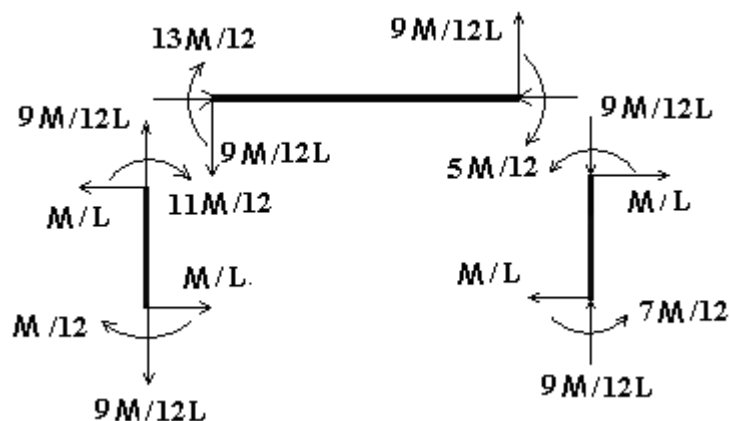


Рис.9.7 Усилия в сечениях рамы

Картина усилий в стержнях рамы, представленная на рис.9.7, свидетельствует о том, что все стержни по отдельности и рама в целом находятся в равновесии.

Имея перед глазами картину распределения усилий в элементах рамы, несложно построить эпюры поперечной и продольной сил, рис.9.8. Здесь же приведено правило знаков, которое использовалось при построении эпюр.

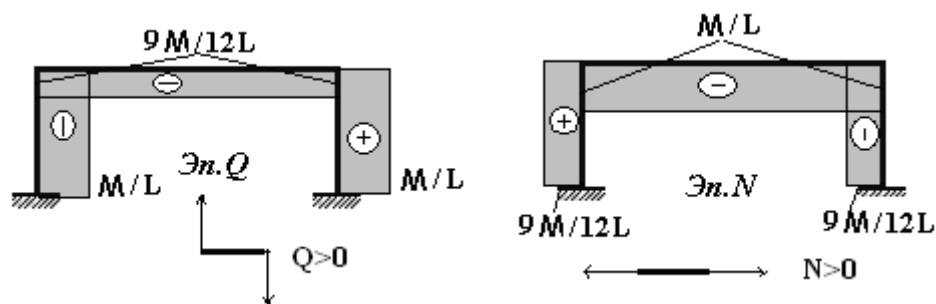


Рис.9.8 Эпюры поперечной и продольной сил

9.2 Смешанный метод расчета стержневых систем

9.2.1 Пример расчета рамы смешанным методом

Поясним существование смешанного метода на примере.

Пример 9.2

Рассмотрим пример расчета рамы, представленной на рис.9.9.

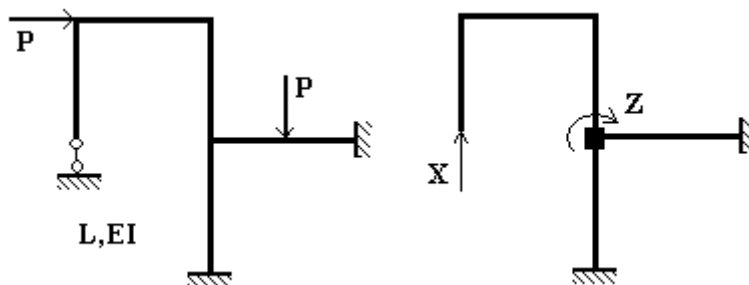


Рис.9.9 Рама и основная система рамы при расчете смешанным методом

Для простоты выкладок стержни рамы приняты имеющими одинаковые длины и жесткость. Рама нагружена двумя равными сосредоточенными силами P , одна из которых приложена в узле конструкции, а другая посередине одного из стержней, как показано на рис. 9.9.

Степень статической неопределимости рамы равна четырем, степень кинематической неопределимости в случае, когда не учитывается влияние осевых деформаций на узловое перемещение, равна пяти, то есть расчет рамы методом сил сводится к решению задачи с четырьмя неизвестными силами, а расчет методом перемещений сводится к решению задачи относительно пяти неизвестных обобщенных перемещений.

Между тем можно заметить, что конструкция рамы обладает следующей особенностью. Левая часть рамы, состоящая из трех стержней, имеет высокую степень кинематической неопределимости. Неизвестными являются углы поворота двух свободных жестких узлов и горизонтальные линейные смещения опорного узла и верхнего пояса. В то же время степень статической неопределимости левой части рамы равна единице: в качестве неизвестной можно выбрать, например, усилие в вертикальном опорном стержне. Правая часть рамы, состоящая из двух стержней, представляет собой жесткий контур, степень статической неопределимости которого равна трем. Степень кинематической неопределимости контура равна единице: неизвестным является угол поворота жесткого узла. Смешанный метод предлагает учесть указанную особенность рамы и построить основную систему, отбросив одну “лишнюю” связь в левой части контура – опорный стержень и введя одну дополнительную связь, препятствующую повороту жесткого узла, в правой части

контура. В соответствии с такой основной системой расчет рамы сводится к определению двух неизвестных: усилия X в опорном стержне и угла поворота Z жесткого узла. Основная система и неизвестные смешанного метода показаны на рис.9.9.

Дальнейший ход расчета смешанным методом содержит ту же последовательность действий, которая принята при расчете каноническим методом сил и каноническим методом перемещений.

Вначале рассматриваются последовательно *“единичные” состояния основной системы*. В каждом из состояний определяются усилия, при расчете рам строятся *“единичные”* эпюры моментов. На рис.9.10 приведены *“единичные”* состояния, возникающие в основной системе рассматриваемой рамы при действии неизвестной силы $X=1$ и неизвестного поворота жесткого узла $Z=1$: показана схема деформации основной системы в каждом из состояний и приведены *“единичные”* эпюры моментов \bar{M}_X и \bar{M}_Z .

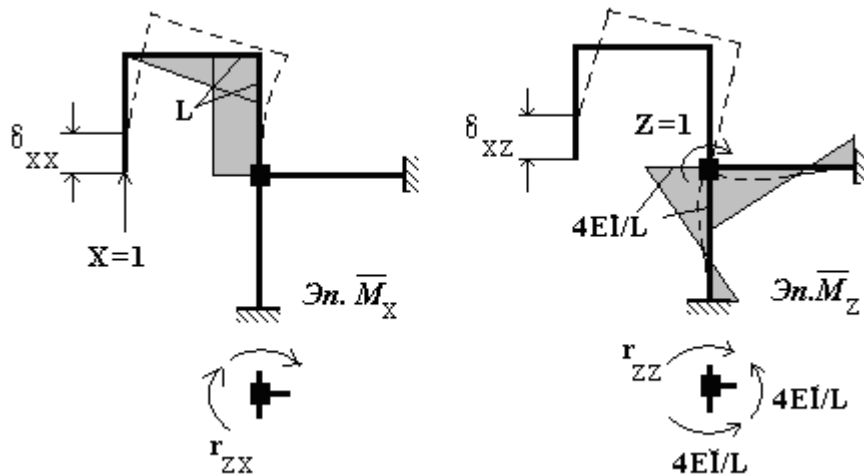


Рис.9.10 “Единичные” состояния основной системы смешанного метода и “единичные” эпюры моментов

Далее определяются перемещения по направлению неизвестной X . Одно из перемещений вызвано самой неизвестной $X=1$, как в методе сил, а другое перемещение вызвано поворотом $Z=1$ жесткого узла – это особенность смешанного метода. Перемещение от неизвестной силы определяется по обычной технологии метода Мора. В рассматриваемом примере перемещение δ_{xx} обозначено на схеме рис.9.10 и определяется *“перемножением”* *“единичной”* эпюры моментов самой на себя с использованием приема Верещагина:

$$\delta_{xx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} L \cdot L \cdot \frac{2}{3} L + L \cdot L \cdot L \right) = \frac{4L^3}{3EI}.$$

Перемещение δ_{xz} по направлению неизвестной силы, вызванное поворотом $Z=1$ жесткого узла также показано на схеме и определяется геометрически. При повороте относительно центра жесткого узла перемещение свободного конца основной системы происходит по нормали к радиус-вектору, проведенному из центра в точку на свободном конце, то есть как раз по направлению “лишней” неизвестной X . Это перемещение определяется как произведение радиус-вектора на угол поворота:

$$\delta_{xz} = L \cdot Z \rightarrow \delta_{xz} = L \text{ при } Z=1 .$$

Затем определяются реакции в дополнительной связи, возникающие от поворота $Z=1$, как в методе перемещений, и от неизвестной метода сил $X=1$, что является особенностью смешанного метода. Реакция r_{zx} , вызванная силой $X=1$, определяется, исходя из распределения моментов \bar{M}_x , путем рассмотрения равновесия выделенного из основной системы жесткого узла, как показано на рис.9.10. Эта реакция определяется так:

$$r_{zx} + L = 0 \rightarrow r_{zx} = -L.$$

Реакция r_{zz} определяется, исходя из распределения моментов \bar{M}_z , также путем рассмотрения равновесия выделенного из основной системы жесткого узла, как это делается всегда при расчете методом перемещений. Схема выделенного узла с приложенными к нему моментами приведена на рис.9.10. Реакция определяется так:

$$r_{zz} - \frac{4EI}{L} - \frac{4EI}{L} = 0 \rightarrow r_{zz} = \frac{8EI}{L}.$$

Отметим наличие взаимности перемещения, вызванного поворотом, и реакции, вызванной силой:

$$\delta_{xz} = -r_{zx}.$$

Далее переходим к определению усилий в “грузовом” состоянии основной системы смешанного метода, то есть к построению “грузовой” эпюры моментов, рис. 9.11.

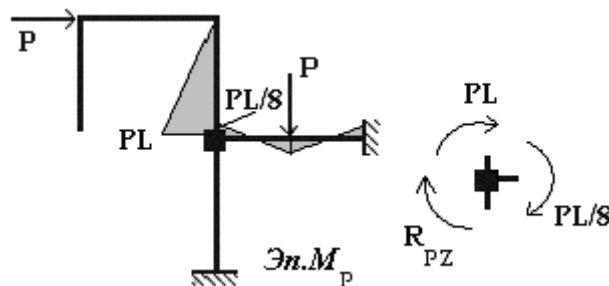


Рис.9.11 “Грузовое” состояние основной системы смешанного метода и “грузовая” эпюра моментов

В статически определимой части основной системы эпюра строится с использованием уравнений равновесия элементов рамы, как это обычно делается при расчете методом сил. В кинематически определимой части основной системы эпюра моментов строится с использованием таблиц однопролетных балок.

Перемещение Δ_{PX} в основной системе по направлению неизвестной силы X , вызванное нагрузкой, определяется методом Мора “перемножением” двух эпюр моментов – “единичной” эпюры \bar{M}_X и “грузовой” эпюры M_P :

$$\Delta_{PX} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} PL \cdot L \cdot L = \frac{PL^3}{2EI}.$$

Реакцию в дополнительном закреплении основной системы r_{zP} от нагрузки определяем статическим методом, исходя из уравнения равновесия вырезанного из основной системы узла, как показано на рис. 9.11:

$$R_{PZ} = -PL - \frac{PL}{8} = -\frac{9PL}{8}.$$

Для определения неизвестных смешанного метода составим два уравнения: уравнение совместности перемещений по направлению отброшенной в основной системе связи и уравнение равновесия жесткого узла, закрепленного в основной системе от поворота. Эти уравнения являются условиями эквивалентности основной системы смешанного метода и заданной конструкции и являются разрешающими уравнениями смешанного метода:

$$\begin{aligned} \frac{4L^3}{3EI} X + L \cdot Z + \frac{PL^3}{2EI} &= 0; \\ -L \cdot X + \frac{8EI}{L} Z - \frac{9}{8} PL &= 0. \end{aligned}$$

В отличие от канонических систем уравнений метода сил и метода перемещений, система разрешающих уравнений смешанного метода не обладает симметрией.

Решая полученную систему линейных алгебраических уравнений, определяем неизвестные смешанного метода:

$$X = -\frac{123}{280} P = -0.439P; \quad Z = \frac{3PL^2}{35EI} = 0.0857 \frac{PL^2}{EI}.$$

Окончательная эпюра изгибающего момента строится в соответствии с формулой

$$M(s) = \bar{M}_X(s) \cdot X + \bar{M}_Z(s) \cdot Z + M_P(s)$$

путем геометрического сложения соответствующих эпюр.

Неизвестными задачи являются приложенные к основной системе обобщенные усилия по направлению отброшенных связей – $X_1 \dots X_i \dots X_{NS}$ и обобщенные перемещения в основной системе по направлению введенных дополнительных связей – $Z_1 \dots Z_k \dots Z_{NZ}$. Общее число неизвестных задачи равно $NS + NZ$.

Коэффициенты системы уравнений имеют следующий смысл:

δ_{ij} – перемещение в основной системе в направлении неизвестной силы X_i , вызванное силой $X_j = 1$;

δ_{ii}^* – перемещение в основной системе в направлении неизвестной силы X_i , вызванное перемещением $Z_1 = 1$;

r_{kj}^* – реакция в дополнительной связи по направлению неизвестного перемещения Z_k , вызванная неизвестной силой $X_j = 1$;

r_{kl} – реакция в дополнительной связи по направлению неизвестного перемещения Z_k , вызванная неизвестным перемещением $Z_l = 1$.

Свободные члены уравнений имеют следующий смысл:

Δ_{pi} – перемещение в основной системе смешанного метода от нагрузки в направлении неизвестной силы X_i ;

R_{pk} – реакция в дополнительной связи основной системы в направлении неизвестного перемещения Z_k , вызванная нагрузкой.

Перемещения δ_{ij} и Δ_{pi} , вызванные силовым воздействием, определяются методом Мора. Перемещения δ_{ii}^* , вызванные неизвестными перемещениями, определяются геометрически путем построения плана перемещений. Наконец, реакции r_{kj}^* , r_{kl} , R_{pk} определяются статическим способом из равновесия элементов основной системы, независимо от того, вызваны эти реакции силами или перемещениями. Для определения коэффициентов и свободных членов необходимо предварительно определить усилия и построить эпюры усилий в “единичных” и в “грузовом” состояниях основной системы смешанного метода, при расчете рам это эпюры $\bar{M}_{X1} \dots \bar{M}_{X,NS}$, $\bar{M}_{Z1} \dots \bar{M}_{Z,NZ}$, M_p .

Коэффициенты разрешающей системы уравнений смешанного метода обладают следующими свойствами:

$\delta_{ii} > 0$ и $r_{kk} > 0$ – элементы, стоящие на главной диагонали матрицы коэффициентов, всегда положительны;

$\delta_{ij} = \delta_{ji}$ и $r_{ik} = r_{ki}$ – блоки матрицы коэффициентов размером $NS * NS$ и $NZ * NZ$, стоящие на главной диагонали, симметричны;

$\delta_{ik}^* = -r_{ki}^*$ – расположенные симметрично относительно главной диагонали элементы блоков матрицы размером $NS * NZ$ и $NZ * NS$ равны между

собой по величине и противоположны по знаку, так что матрица коэффициентов в целом не обладает симметрией.

Система разрешающих уравнений смешанного метода состоит из двух групп уравнений. Первая группа состоит из NS уравнений совместности перемещений и выражает требование обращения в ноль перемещений в основной системе, вызванных как неизвестными силами и нагрузками, так и неизвестными перемещениями, по направлению отброшенных связей. Вторая группа содержит NZ уравнений равновесия и выражает требование обращения в ноль реакций в дополнительных связях основной системы, вызванных как неизвестными перемещениями, так силами, неизвестными и заданными. В целом система уравнений представляет собой условие эквивалентности основной системы смешанного метода и заданной конструкции.

После определения неизвестных смешанного метода усилия в точках стержневой конструкции определяются в соответствии с формулами:

$$N(s) = \sum_{i=1}^{NS} \bar{N}_{Xi}(s) \cdot X_i + \sum_{k=1}^{NZ} \bar{N}_{Zk}(s) \cdot Z_k + N_p(s);$$

$$Q(s) = \sum_{i=1}^{NS} \bar{Q}_{Xi}(s) \cdot X_i + \sum_{k=1}^{NZ} \bar{Q}_{Zk}(s) \cdot Z_k + Q_p(s);$$

$$M(s) = \sum_{i=1}^{NS} \bar{M}_{Xi}(s) \cdot X_i + \sum_{k=1}^{NZ} \bar{M}_{Zk}(s) \cdot Z_k + M_p(s).$$

Внутренние усилия $N(s)$ и $Q(s)$ можно определить по найденному распределению моментов, как это уже неоднократно делалось ранее.

9.2.3 Вывод канонических уравнений смешанного метода на основе смешанного вариационного принципа

Разрешающие уравнения смешанного метода можно получить на основе энергетических соображений, исходя из смешанного вариационного принципа.

Выше было показано, что при решении задачи смешанным методом поле внутренних усилий в стержнях конструкции представляется в виде комбинации функций различных типов:

функции $\bar{M}_{Xj}(s)$ – усилия в стержнях основной системы смешанного метода от единичных неизвестных сил $X_1 = 1 \dots X_{NS} = 1$, определенные на части конструкции и удовлетворяющие уравнениям равновесия элементов на этой части; эти функции входят в комбинацию с неизвестными коэффициентами $X_1 \dots X_{NS}$;

функции $\bar{M}_{Z_k}(s)$ – усилия в стержнях основной системы смешанного метода от единичных неизвестных обобщенных перемещений $Z_1 = 1 \dots Z_{NZ} = 1$, определенные на другой части конструкции и не удовлетворяющие уравнениям равновесия; эти функции входят в комбинацию с коэффициентами $Z_1 \dots Z_{NZ}$;

функция $M_p(s)$ – усилия в стержнях основной системы смешанного метода от нагрузки, которые также удовлетворяют уравнениям равновесия только на части конструкции.

Вариационный принцип Кастильяно выделяет действительное поле усилий из множества статически допустимых полей как поле, сообщаемое функционалу Кастильяно – потенциальной энергии деформации стационарное значение.

Один из смешанных вариационных принципов, который удобно использовать для энергетической формулировки смешанного метода, получают, обобщая принцип Кастильяно следующим образом: функционал Кастильяно – потенциальную энергию деформации – дополняют слагаемыми, представляющими собой умноженные на произвольные коэффициенты левые части уравнений равновесия. Эти коэффициенты оказываются обобщенными перемещениями в тех направлениях, для которых составлены соответствующие уравнения равновесия. При использовании данного смешанного вариационного принципа для полей сравнения, среди которых разыскивается действительное поле усилий, требование статической допустимости снимается.

Запишем выражение для потенциальной энергии деформации, используя представление усилий, принятое при решении задачи смешанным методом. Оставим здесь и повсюду далее для упрощения громоздких выкладок из числа всех внутренних усилий только изгибающие моменты, понимая при этом, что по мере необходимости продольные и поперечные силы могут быть учтены:

$$U(X_1 \dots X_{NS}, Z_1 \dots Z_{NZ}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{NC} \frac{1}{EI_n} \int_{s=0}^{L_n} \left(\sum_{i=1}^{NS} \bar{M}_{X_i}(s) \cdot X_i + \sum_{k=1}^{NZ} \bar{M}_{Z_k}(s) \cdot Z_k + M_p(s) \right)^2 ds.$$

Поля внутренних усилий, используемые при решении задачи смешанным методом, не обеспечивают равновесие по направлению тех обобщенных перемещений, которые приняты в качестве кинематических неизвестных $Z_1 \dots Z_{NZ}$, поэтому функционал Кастильяно нужно дополнить уравнениями равновесия по направлению этих обобщенных перемещений. Запишем уравнение равновесия по направлению перемещения Z_k в энергетической форме, включив при этом в число внешних сил “лишние” неизвестные усилия $X_1 \dots X_{NS}$ (энергетическая форма уравнений равновесия получена ранее с использованием вариационного принципа Лагранжа):

$$\sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_n} \frac{\bar{M}_{Z_1}(s) \cdot \bar{M}_{Z_k}(s)}{EI_n} ds \cdot Z_1 + \dots + \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_n} \frac{\bar{M}_{Z,NZ}(s) \cdot \bar{M}_{Z_k}(s)}{EI_n} ds \cdot Z_{NZ} - \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_k} \frac{M_P^{CO}(s) \cdot \bar{M}_{Z_i}(s)}{EI_n} ds -$$

$$- X_1 \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_k} \frac{\bar{M}_{X_1}^{CO}(s) \cdot \bar{M}_{Z_k}(s)}{EI_n} ds - \dots - X_{NS} \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_k} \frac{\bar{M}_{X,NS}^{CO}(s) \cdot \bar{M}_{Z_k}(s)}{EI_n} ds = 0, \quad k = 1, 2, \dots, NZ.$$

Здесь $\bar{M}_{X_1}^{CO}(s) \dots \bar{M}_{X,NS}^{CO}(s)$ – изгибающие моменты в стержнях статически определимой основной системы, возникающие от “лишних” неизвестных усилий $X_1=1, \dots, X_{NS}=1$ соответственно, $M_P^{CO}(s)$ – изгибающие моменты в стержнях статически определимой основной системы от нагрузки.

Составим теперь смешанный функционал, добавив к выражению функционала Кастильяно NZ слагаемых по числу уравнений равновесия в дополнительных связях основной системы смешанного метода:

$$\mathbf{K}^*(X_1 \dots X_{NS}, Z_1 \dots Z_{NZ}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{NC} \frac{1}{EI_n} \int_{s=0}^{L_n} \left(\sum_{i=1}^{NS} \bar{M}_{X_i}(s) \cdot X_i + \sum_{k=1}^{NZ} \bar{M}_{Z_k}(s) \cdot Z_k + M_P(s) \right)^2 ds -$$

$$- \sum_{k=1}^{NZ} Z_k \cdot \left(\sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_n} \frac{\bar{M}_{Z_1}(s) \cdot \bar{M}_{Z_k}(s)}{EI_n} ds \cdot Z_1 + \dots + \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_n} \frac{\bar{M}_{Z,NZ}(s) \cdot \bar{M}_{Z_k}(s)}{EI_n} ds \cdot Z_{NZ} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_k} \frac{M_P^{CO}(s) \cdot \bar{M}_{Z_i}(s)}{EI_n} ds - X_1 \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_k} \frac{\bar{M}_{X_1}^{CO}(s) \cdot \bar{M}_{Z_k}(s)}{EI_n} ds - \dots - X_{NS} \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_k} \frac{\bar{M}_{X,NS}^{CO}(s) \cdot \bar{M}_{Z_k}(s)}{EI_n} ds \right).$$

В рассматриваемом случае множество функций, на котором определены функционалы, определяется множеством дискретных переменных $X_1 \dots X_{NS}, Z_1 \dots Z_{NZ}$, то есть функционалы оказываются функциями $NS + NZ$ переменных. Условие стационарности функционала $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}^*(X_1 \dots X_{NS}, Z_1 \dots Z_{NZ})$ состоит в равенстве нулю всех $NS + NZ$ частных производных функции по дискретным переменным.

Первая группа условий – это частные производные функции многих переменных $\mathbf{K}^*(X_1 \dots X_{NS}, Z_1 \dots Z_{NZ})$ по $X_1 \dots X_{NS}$:

$$\frac{\partial \mathbf{K}^*}{\partial X_j} = \sum_{i=1}^{NS} \sum_{n=1}^{NC} \int_0^{L_n} \frac{\bar{M}_{X_i}(s) \bar{M}_{X_j}(s)}{EI_n} ds \cdot X_i + \sum_{k=1}^{NZ} \sum_{n=1}^{NC} \int_0^{L_n} \frac{\bar{M}_{X_j}^{CO}(s) \bar{M}_{Z_k}(s)}{EI_n} ds \cdot Z_k +$$

$$+ \sum_{n=1}^{NC} \int_0^{L_n} \frac{M_P(s) \bar{M}_{X_j}(s)}{EI_n} ds = 0 \quad j = 1, 2, \dots, NS$$

При вычислении производных учтено, что интегралы типа $\sum_{n=1}^{NC} \int_0^{L_n} \frac{\bar{M}_{Z_k}(s)\bar{M}_{X_j}(s)}{EI_n} ds$

обращаются в ноль, поскольку функции $\bar{M}_{Z_k}(s)$ и $\bar{M}_{X_j}(s)$ определены на разных частях конструкции и не пересекаются ни на одном из стержней.

Полученные уравнения в соответствии с теоремой Кастильяно выражают условия равенства нулю обобщенных перемещений, энергетически соответствующих обобщенным силам $X_1 \dots X_{NS}$.

Вторая группа условий стационарности функционала – это частные производные функции $K^*(X_1 \dots X_{NS}, Z_1 \dots Z_{NZ})$ по $Z_1 \dots Z_{NZ}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K^*}{\partial Z_i} = & \sum_{k=1}^{NZ} \sum_{n=1}^{NC} \int_0^{L_n} \frac{\bar{M}_{Z_k}(s)\bar{M}_{Z_i}(s)}{EI_n} ds \cdot Z_k - 2 \cdot \sum_{k=1}^{NZ} \sum_{n=1}^{NC} \int_0^{L_n} \frac{\bar{M}_{Z_k}(s)\bar{M}_{Z_i}(s)}{EI_n} ds \cdot Z_k + \\ & + \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_k} \frac{M_P^{CO}(s) \cdot \bar{M}_{Z_i}(s)}{EI_n} ds + \sum_{i=1}^{NS} X_i \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_k} \frac{\bar{M}_{X_i}^{CO}(s) \cdot \bar{M}_{Z_i}(s)}{EI_n} ds = 0 \quad i = 1, 2, \dots, NZ \end{aligned}$$

При вычислении производных учтено, что интегралы вида

$$\sum_{n=1}^{NC} \int_0^{L_n} \frac{\bar{M}_{Z_k}(s)\bar{M}_{X_i}(s)}{EI_n} ds \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{NC} \int_0^{L_n} \frac{\bar{M}_{Z_k}(s)M_P(s)}{EI_n} ds$$

обращаются в ноль.

После приведения подобных членов в выражении производной получаем вторую группу уравнений смешанного метода. Эти уравнения выражают условия равенства нулю обобщенных реакций по направлению неизвестных обобщенных перемещений, которые возникают в дополнительных связях основной системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K^*}{\partial Z_i} = & \sum_{k=1}^{NZ} \sum_{n=1}^{NC} \int_0^{L_n} \frac{\bar{M}_{Z_k}(s)\bar{M}_{Z_i}(s)}{EI_n} ds \cdot Z_k - \sum_{k=1}^{NS} \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_k} \frac{\bar{M}_{X_i}^{CO}(s) \cdot \bar{M}_{Z_k}(s)}{EI_n} ds \cdot X_i - \\ & - \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_k} \frac{M_P^{CO}(s) \cdot \bar{M}_{Z_i}(s)}{EI_n} ds = 0 \quad i = 1, 2, \dots, NZ \end{aligned}$$

9.2.4 Энергетический способ определения коэффициентов и свободных членов разрешающих уравнений смешанного метода

Сравнивая полученные уравнения с канонической записью уравнений смешанного метода, получаем энергетические формулы для вычисления коэффициентов и свободных членов уравнений.

Для вычисления коэффициентов δ_{ij} и свободных членов Δ_{Pi} , имеющих смысл перемещений в направлении неизвестных от единичных “лишних” неизвестных и от заданной нагрузки соответственно, получена формула Мора:

$$\delta_{ij} = \sum_{n=1}^{NC} \int_0^{L_n} \frac{\overline{M}_{Xi}(s) \overline{M}_{Xj}(s)}{EI_n} ds; \quad \Delta_{Pi} = \sum_{n=1}^{NC} \int_0^{L_n} \frac{M_P(s) \overline{M}_{Xi}(s)}{EI_n} ds.$$

Для вычисления коэффициентов r_{ki} и свободных членов R_{Pk} , имеющих смысл реакций в дополнительных связях основной системы от единичных “лишних” неизвестных перемещений и от заданной нагрузки соответственно, получены формулы:

$$r_{ki} = \sum_{n=1}^{NC} \int_0^{L_n} \frac{\overline{M}_{Zk}(s) \overline{M}_{Zi}(s)}{EI_n} ds; \quad R_{Pk} = \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_k} \frac{M_P^{CO}(s) \cdot \overline{M}_{Zk}(s)}{EI_n} ds.$$

Для вычисления коэффициентов $\delta_{ik}^* = -r_{ki}^*$, которые имеют смысл перемещений по направлению “лишних” неизвестных сил от единичных неизвестных перемещений основной системы смешанного метода и реакций в дополнительных связях основной системы от единичных “лишних” неизвестных сил соответственно, получаем следующую формулу:

$$\delta_{ik}^* = -r_{ki}^* = \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_k} \frac{\overline{M}_{Xi}^{CO}(s) \cdot \overline{M}_{Zk}(s)}{EI_n} ds.$$

9.2.5 Пример определения коэффициентов системы уравнений смешанного метода энергетическим способом

Пример 9.3

Покажем вычисление энергетическим способом коэффициентов и свободных членов в приведенном выше примере расчета рамы.

Коэффициент δ_{xx} и свободный член Δ_{Px} представляют собой перемещения, вызванные силами, и уже вычислены по энергетической формуле – по формуле Мора, как это всегда делается при решении задач методом сил.

Для вычисления остальных коэффициентов и свободного члена необходимо построить дополнительные эпюры – эпюры моментов в статически определимой основной системе от единичной неизвестной $X=1$ и от заданной нагрузки. На рис. 9.13 приведены дополнительные эпюры, необходимые для выполнения данного примера.

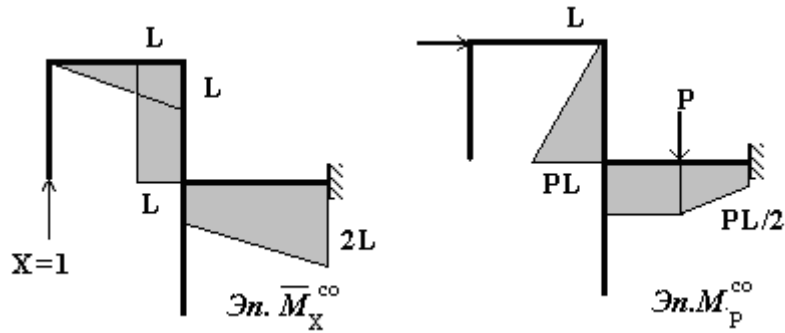


Рис.9.13 Эпюры моментов в статически определимой основной системе от единичной “лишней” неизвестной силы и от нагрузки

Эпюра моментов от единичного неизвестного перемещения в основной системе смешанного метода, построенная ранее и использованная для вычисления коэффициента r_{ZZ} статическим методом, приведена для удобства выкладок:

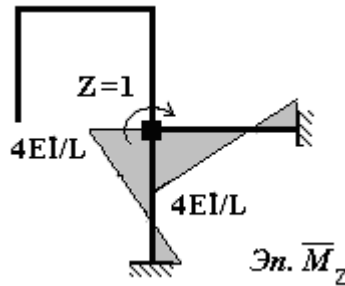


Рис.9.14 Эпюра моментов в основной системе смешанного метода от единичного неизвестного перемещения

Вычислим коэффициенты r_{ZZ} , $\delta_{ZX}^* = -r_{XZ}^*$ и свободный член R_{PZ} уравнений смешанного метода по энергетическим формулам.

“Перемножаем” необходимые эпюры, используя для вычисления интегралов известные графические приемы – формулу трапеций и прием Верещагина:

$$r_{ZZ} = \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_k} \frac{\bar{M}_Z(s) \cdot \bar{M}_Z(s)}{EI_n} ds = 2 \cdot \frac{1}{6EI} \left(2 \cdot \frac{4EI}{L} \cdot \frac{4EI}{L} + 2 \cdot \frac{2EI}{L} \cdot \frac{2EI}{L} - 2 \cdot \frac{4EI}{L} \cdot \frac{2EI}{L} \right) = \frac{8EI}{L};$$

$$\delta_{ZX}^* = -r_{XZ}^* = \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_k} \frac{\bar{M}_X^{CO}(s) \cdot \bar{M}_Z(s)}{EI_n} ds = \frac{1}{6EI} \left(2 \cdot L \cdot \frac{4EI}{L} - 2 \cdot 2L \cdot \frac{2EI}{L} - L \cdot \frac{2EI}{L} + 2L \cdot \frac{4EI}{L} \right) = L;$$

$$R_{PZ} = - \sum_{n=1}^{NC} \int_{s=0}^{L_k} \frac{M_P^{CO}(s) \cdot \bar{M}_Z(s)}{EI_n} ds = - \frac{1}{EI} \left(PL \cdot L \cdot \frac{EI}{L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{PL}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{EI}{L} \right) = - \frac{9}{8} PL.$$

Как видно, данные выражения совпадают с формулами, полученными для соответствующих коэффициентов и свободных членов ранее.

9.3 Полная система уравнений для плоской рамы с жесткими узлами

9.3.1 Расчетная схема рамы с жесткими узлами, используемая для построения полной системы уравнений

Составим полную систему уравнений для рамы, все стержни которой присоединены к узлам жестко и без эксцентриситетов. Рама представляется в виде ансамбля элементов – узлов и стержней, соединяющих узлы. Такая расчетная схема уже использовалась в главе 8 при составлении матричных алгоритмов метода перемещений. Напомним кратко основные особенности этой расчетной схемы.

Узлы рамы предполагаются имеющими настолько малые размеры, что размерами узлов можно пренебречь и считать узлы точками. Элементы стержневой системы – стержни – соединены в узлах – в точках пересечения осей стержневых элементов. Узловая точка в отличие от идеальной точки наделяется возможностью поворота, при этом имеется в виду поворот малой окрестности узловой точки, включающей малые участки примыкающих к узлу стержней. Если стержни присоединены к узлу жестко, то поворот узла сопровождается поворотом сечений жестко прикрепленных к узлу стержней. Узлами являются также точки на осях стержней, к которым приложены сосредоточенные нагрузки, и опорные точки конструкции.

Вводится система координатных осей x, y, z , общая для всей конструкции. Конструкция располагается в положительном квадранте.

Положение узлов конструкции определяется координатами узловых точек в глобальной системе координат. Узлы конструкции нумеруются, вообще говоря, в произвольном порядке. Полное число узлов обозначается через N_U . Полное число стержней обозначается через N_E .

В качестве примера изучим расчетную схему плоской рамы, которая уже рассматривалась в разделе 8. Расчетная схема рамы изображена на рис.9.15.

Расчетная схема плоской рамы, представленная на рисунке 9.15, имеет три свободных узла, три опорных узла и дополнительный узел – точку приложения сосредоточенной силы, таким образом, полное число узлов рамы равно семи – $N_U=7$. Узлы рамы пронумерованы.

Расчетная схема состоит из шести стержней – $N_E=6$, которые пронумерованы в произвольном порядке. С каждым из стержней связана локальная система координат ξ, η, ζ – правая декартова система координат, начало которой располагается в начальной узловой точке стержня – в “начале” стержня. Соответственно второй узел, к которому присоединен стержень, называется “концом” стержня. Ось ξ направлена вдоль оси стержня, ось η располагается в плоскости системы, а ось ζ параллельна оси z и сонаправлена с осью z . На рис.9.15 на каждом стержне стрелочкой показано направление локальной оси ξ .

Рама нагружена узловой нагрузкой: к узлам приложены сосредоточенные силы и изгибающий момент, действующие в плоскости рамы.

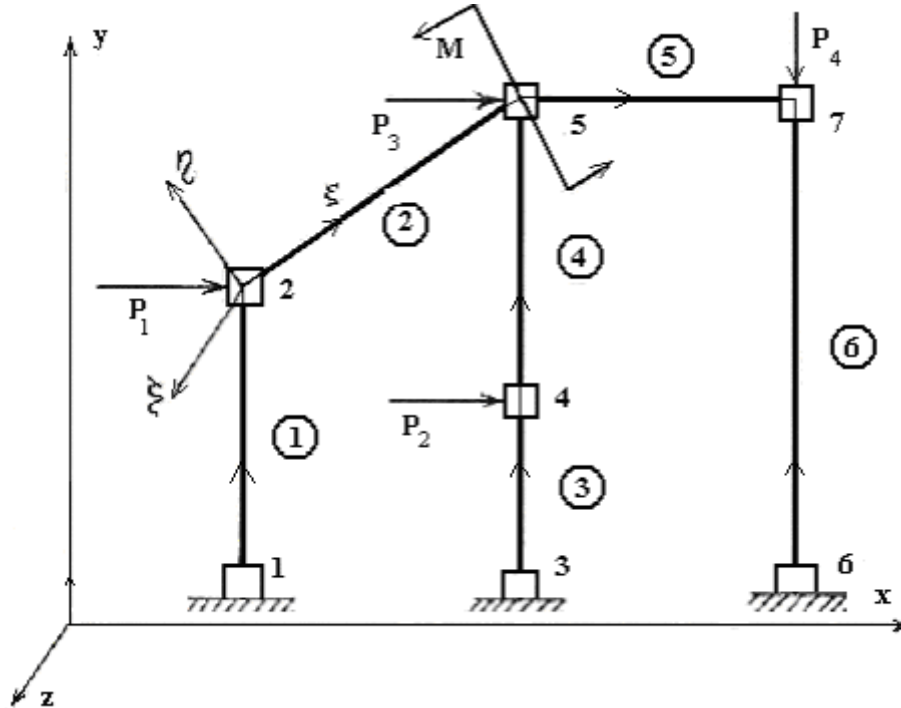


Рис.9.15 Расчетная схема плоской рамы

9.3.2 Параметры, определяющие напряженно-деформированное состояние плоской рамы с жесткими узлами

Определим набор статических и геометрических параметров, которые полностью определяют напряженно-деформированное состояние плоской рамы с жесткими узлами и для нахождения которых и будет составлена полная система уравнений.

К числу таких параметров, прежде всего, следует отнести обобщенные узловые перемещения. Узлы плоской конструкции при плоской деформации перемещаются только в ее плоскости и испытывают повороты вокруг глобальной оси z . Проекции перемещения узла с номером n на глобальные оси и угол поворота узла вокруг оси z составляют матрицу-столбец

$$\mathbf{u}_{xn} = \begin{Bmatrix} u_{xn} \\ u_{yn} \\ \theta_n \end{Bmatrix} = \{u_{xn} \quad u_{yn} \quad \theta_n\}, \quad n = 1, 2, \dots, NY.$$

Узловые перемещения всех узлов объединим в матрицу-столбец размером $3NY \times 1$:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{x1} \\ \mathbf{u}_{x2} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{x,NY} \end{Bmatrix}.$$

Некоторые из этих перемещений известны заранее, например нулевые перемещения опорных узлов. Остальные перемещения столбца составляют первую группу неизвестных полной системы уравнений.

Обратимся к назначению статических параметров. На рис.9.16 изображен стержень с номером i , выделенный из рамы с жесткими узлами. Внутренние усилия в начальном и конечном сечениях стержня показаны положительными согласно принятым правилам знаков для внутренних усилий. Внутренние усилия объединяются в матрицы-столбцы следующего вида:

$$\mathbf{s}_i^{\text{нач}} = \begin{Bmatrix} N_i^{\text{нач}} \\ Q_i^{\text{нач}} \\ M_i^{\text{нач}} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{s}_i^{\text{кон}} = \begin{Bmatrix} N_i^{\text{кон}} \\ Q_i^{\text{кон}} \\ M_i^{\text{кон}} \end{Bmatrix}.$$

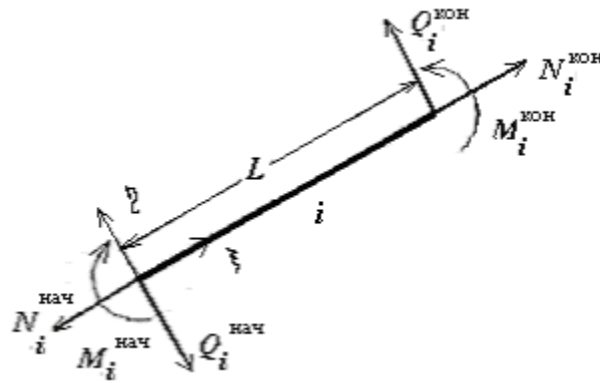


Рис.9.16 Внутренние силы в начальном и конечном сечениях стержня

Можно было бы в качестве статических неизвестных выбрать внутренние усилия в начальном и конечном сечении стержня. В таком случае, решив полную систему уравнений, можно сразу построить эпюры внутренних усилий в стержне, соединив найденные начальные и конечные ординаты усилий прямыми линиями, поскольку нагрузку пока принято считать узловой. Однако эти шесть усилий не являются независимыми, поскольку связаны тремя уравнениями равновесия стержня на плоскости. Уравнения равновесия стержней при таком подходе должны быть включены в полную систему уравнений.

С другой стороны, можно уже на этом этапе понизить число неизвестных и число уравнений полной системы, включив в набор неизвестных лишь три независимых усилия. Для этого нужно сразу решить уравнения равновесия стержня и выразить оставшиеся три усилия через выбранные независимые. Выбор независимых статических параметров соответствует выбору основной системы метода сил для жестко закрепленного по концам стержня и назначению лишних неизвестных. Как известно, этот выбор не является единственным.

Выберем в качестве трех независимых статических параметров следующие внутренние усилия $N_i^{\text{нач}} = S_{1i}$, $M_i^{\text{нач}} = S_{2i}$ и $M_i^{\text{кон}} = S_{3i}$, что соответствует выбору в качестве основной

системы стержня с двумя шарнирными опорами – подвижной и неподвижной и назначению в качестве неизвестных усилий в отброшенных связях. Решаем систему уравнений равновесия стержня

$$\begin{aligned} -N_i^{\text{нач}} + N_i^{\text{кон}} &= 0; \\ -Q_i^{\text{нач}} + Q_i^{\text{кон}} &= 0; \\ -M_i^{\text{нач}} + M_i^{\text{кон}} + Q_i^{\text{кон}} \cdot L &= 0 \end{aligned}$$

и получаем искомые выражения:

$$\begin{aligned} N_i^{\text{кон}} &= N_i^{\text{нач}} = S_{1i}; \\ Q_i^{\text{нач}} &= Q_i^{\text{кон}} = \frac{M_i^{\text{нач}} - M_i^{\text{кон}}}{L_i} = \frac{S_{2i} - S_{3i}}{L_i}; \\ M_i^{\text{нач}} &= S_{2i}; M_i^{\text{кон}} = S_{3i}. \end{aligned}$$

Введем столбец независимых статических параметров стержня и запишем в матричной форме соотношение между усилиями в начальном и конечном сечении через независимые статические параметры:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i &= \begin{Bmatrix} N_i^{\text{нач}} \\ M_i^{\text{нач}} \\ M_i^{\text{кон}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ S_{3i} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{s}_i^{\text{нач}} = \begin{Bmatrix} N_i^{\text{нач}} \\ Q_i^{\text{нач}} \\ M_i^{\text{нач}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & -1/L \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ S_{3i} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_i^{\text{нач}} \cdot \mathbf{s}_i; \\ \mathbf{s}_i^{\text{кон}} &= \begin{Bmatrix} N_i^{\text{кон}} \\ Q_i^{\text{кон}} \\ M_i^{\text{кон}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & -1/L \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ S_{3i} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_i^{\text{кон}} \cdot \mathbf{s}_i. \end{aligned}$$

Таким образом, определилась группа статических неизвестных полной системы уравнений, образующая матрицу-столбец размером $3NC$:

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{NC} \end{Bmatrix}.$$

Введем в качестве параметров, характеризующих деформацию стержневого элемента, обобщенные перемещения, энергетически соответствующие обобщенным силам – независимым статическим параметрам. Число обобщенных деформаций равно числу статических параметров, то есть равно $3NC$. Матрица-столбец обобщенных деформаций определяет третью группу неизвестных и имеет вид:

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{NC} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}_i = \begin{Bmatrix} e_{1i} \\ e_{2i} \\ e_{3i} \end{Bmatrix}.$$

9.3.3 Статические уравнения: уравнения равновесия узлов стержневой системы

Перейдем к составлению полной системы уравнений для рамы с жесткими узлами. Прежде всего, составим уравнения равновесия узлов, которые представляют собой первую группу уравнений полной системы.

Напомним, что в разделе 8, посвященном методу перемещений в форме сложения жесткостей, уже приходилось составлять уравнения равновесия узлов. При составлении уравнений равновесия в методе перемещений рассматривались реакции, действующие на узлы со стороны стержней, далее реакции с помощью матриц жесткости стержней выражались через узловые перемещения, в итоге были получены уравнения равновесия в перемещениях. В нашем случае поступим следующим образом: запишем уравнения равновесия узлов вначале также через реакции в глобальных осях конструкции, а затем выразим реакции уже не через перемещения, а через независимые статические параметры стержней – статические неизвестные полной системы.

Выделим из рамы узел с номером n , рис.9.17.

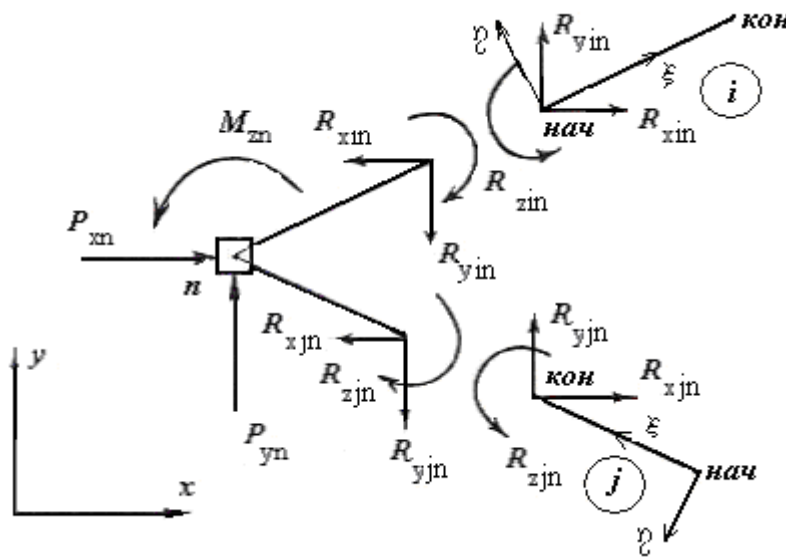


Рис.9.17 Выделенный из конструкции узел

На рисунке показаны лишь два характерных стержня, присоединенных к узлу n . Стержень с номером i является представителем группы стержней, для которых узел n является начальным узлом: локальная система осей стержня имеет начало в этом узле, часто говорят, что ось ξ “выходит” из начального узла. Стержень с номером j представляет стержни, для которых узел n является конечным узлом: локальная ось ξ стержня “входит” в этот узел. Разумеется, количество присоединенных к узлу n стержней может быть и больше двух.

К узлу приложены внешние сосредоточенные обобщенные силы P_{xn}, P_{yn}, M_{zn} и реакции, действующие на стержень со стороны стержней. Реакции, как и внешние силы,

считаются положительными, если они действуют в направлении координатных осей, а положительные моменты, как активные, так и реактивные действуют против часовой стрелки. Уравнения равновесия узла, выраженные через проекции реакций в глобальных осях, имеют вид:

$$\sum X = 0 \rightarrow P_{xn} - \sum_{\text{ВЫХ}} R_{xin} - \sum_{\text{ВХ}} R_{xjn} = 0;$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow P_{yn} - \sum_{\text{ВЫХ}} R_{yin} - \sum_{\text{ВХ}}^{NC} R_{yjn} = 0;$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow M_{zn} - \sum_{\text{ВЫХ}} R_{zin} - \sum_{\text{ВХ}}^{NC} R_{zjn} = 0.$$

Здесь суммирование по i ведется для всех “выходящих” из узла стержней и по j для всех “входящих” в узел стержней.

Составляя уравнения равновесия для всех узлов, получаем систему уравнений равновесия, которая в матричной форме записывается следующим образом:

$$\mathbf{p}_{xn} - \sum_{\text{ВЫХ}} \mathbf{r}_{xin} - \sum_{\text{ВХ}} \mathbf{r}_{xjn} = \mathbf{0}, \quad n = 1, 2, \dots, NY.$$

В уравнении участвуют следующие матрица-столбец узловых нагрузок и матрицы-столбцы реакций:

$$\mathbf{p}_{xn} = \begin{Bmatrix} P_{xn} \\ P_{yn} \\ M_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{xin} = \begin{Bmatrix} R_{xin} \\ R_{yin} \\ R_{zin} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{xjn} = \begin{Bmatrix} R_{xjn} \\ R_{yjn} \\ R_{zjn} \end{Bmatrix}$$

Установим связь между входящими в уравнения равновесия столбцами реакций и независимыми статическими параметрами, введенными для каждого из стержней.

На рис.18.4 вновь показан выделенный из конструкции i -тый стержень. Положение локальных осей стержня относительно осей глобальных определяется углом θ_i и соответственно матрицей направляющих косинусов всех локальных осей относительно осей глобальных:

$$\mathbf{c}_i = \begin{Bmatrix} \cos(\xi_i, x) & \cos(\xi_i, y) & 0 \\ \cos(\eta_i, x) & \cos(\eta_i, y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

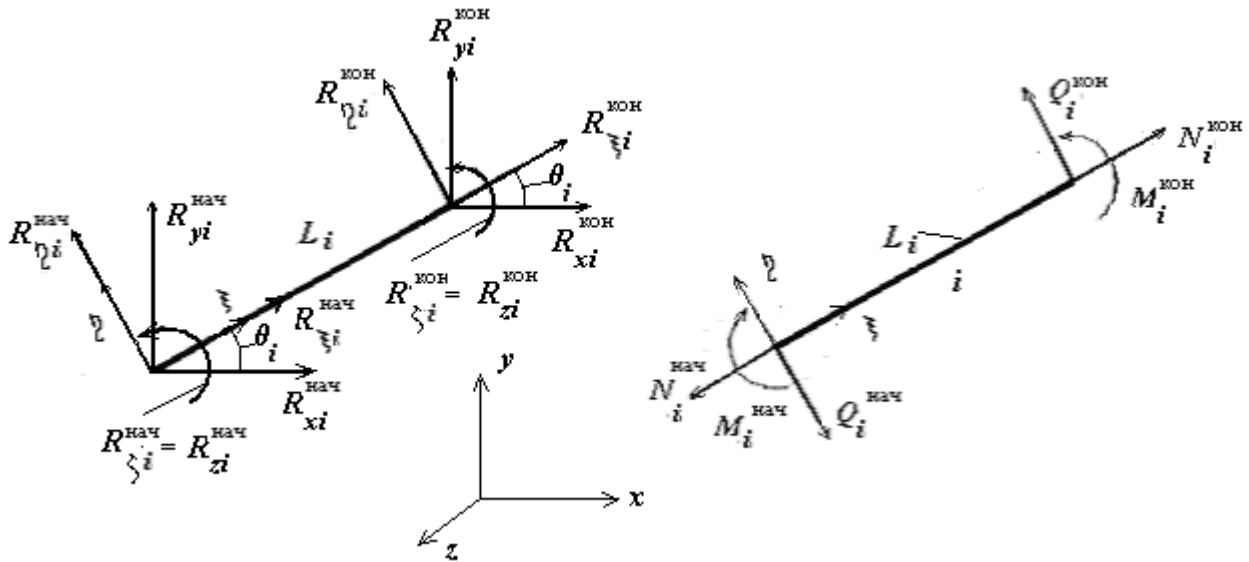


Рис.9.18 Реакции и внутренние силы в начальном и конечном узлах стержня

На рис.9.18 слева показаны составляющие реакций в начальном и конечном сечениях стержня как в проекциях на глобальные оси, так и в проекциях на оси локальные. На второй схеме показаны внутренние усилия в этих сечениях. Подчеркнем, что все компоненты усилий изображены положительными в соответствии с принятым правилом знаков для реакций и внутренних сил. Отметим также, что номера начального и конечного узлов стержня в общей нумерации узлов конструкции здесь пока не определены, поскольку для приведенных ниже соотношений это не имеет значения.

Матрицы-столбцы реакций в начальном сечении стержня в проекциях на глобальные оси связаны с матрицей-столбцом независимых статических параметров стержня следующей цепочкой соотношений:

$$\mathbf{r}_{xi}^{нач} = \begin{Bmatrix} R_{xi}^{нач} \\ R_{yi}^{нач} \\ R_{zi}^{нач} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} R_{\xi i}^{нач} \\ R_{\eta i}^{нач} \\ R_{\zeta i}^{нач} \end{Bmatrix} = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{r}_{\xi i}^{нач};$$

$$\mathbf{r}_{\xi i}^{нач} = \begin{Bmatrix} R_{\xi i}^{нач} \\ R_{\eta i}^{нач} \\ R_{\zeta i}^{нач} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} N_i^{нач} \\ Q_i^{нач} \\ M_i^{нач} \end{Bmatrix} = -\mathbf{s}_i^{нач};$$

$$\mathbf{s}_i^{нач} = \begin{Bmatrix} N_i^{нач} \\ Q_i^{нач} \\ M_i^{нач} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L_i & -1/L_i \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ S_{3i} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_i^{нач} \cdot \mathbf{s}_i.$$

Аналогичная цепочка соотношений связывает реакции и внутренние усилия в конечном сечении стержня с независимыми статическими параметрами данного стержня. В итоге

после необходимых преобразований получаем выражения для входящих в уравнение равновесия матриц-столбцов реакций, действующих на стержни со стороны узлов и соответственно на узлы со стороны стержней, через независимые статические параметры, определяющие напряженно-деформированное состояние стержней:

$$\mathbf{r}_{xi}^{\text{нач}} = -\mathbf{c}_i \mathbf{T}_i^{\text{нач}} \mathbf{s}_i; \quad \mathbf{r}_{xi}^{\text{кон}} = \mathbf{c}_i \mathbf{T}_i^{\text{кон}} \mathbf{s}_i.$$

Эти соотношения не зависят от того, какие в действительности номера имеют начальный и конечный узлы, к которым присоединяется i -тый стержень, поэтому в них не присутствует индекс номера узла. В то же время в составленное ранее матричное уравнение, эквивалентное трем скалярным уравнениям равновесия узла с номером n , входят столбцы реакций, снабженные индексом номера узла. Из этого противоречия выходим следующим образом. При подстановке в матричное уравнение равновесия выражений для матриц-столбцов реакций опустим во всех слагаемых индекс узла, но введем при этом верхние индексы “нач” или “кон” для всех слагаемых в суммах по всем “выходящим” и по всем “входящим” стержням соответственно. Информацию о том, какие реальные номера в общей нумерации узлов конструкции имеют начальный и конечный узлы стержня, получаем из матрицы инцидентий \mathbf{I}_{Y-C} . Таким образом, запись матричного уравнения в форме

$$\mathbf{p}_{xn} - \sum_{\text{ВЫХ}} \mathbf{r}_{xi}^{\text{нач}} - \sum_{\text{ВХ}} \mathbf{r}_{xj}^{\text{кон}} = \mathbf{0}, \quad n=1,2,\dots,NY$$

должна сопровождаться заданием матрицы инцидентий \mathbf{I}_{Y-C} .

Приведем матрицу инцидентий \mathbf{I}_{Y-C} для расчетной схемы рамы, показанной на рис.9.15:

$\mathbf{I}_{Y-C} =$

	i =1	i =2	i =3	i =4	i =5	i =6
n =1	1					
n =2	-1	1				
n =3			1			
n =4			-1	1		
n =5		-1		-1	1	
n =6						1
n =7					-1	-1

Напомним структуру матрицы инцидентий \mathbf{I}_{Y-C} . Матрица имеет число строк, равное числу узлов расчетной схемы конструкции, и число столбцов, равное числу стержней. В столбце конструкции, соответствующем i -тому стержню, отличны от нуля лишь два элемента: элемент в строке, соответствующей начальному узлу стержня, равен +1 и элемент в строке, соответствующей конечному узлу стержня, равен -1.

Подставим полученные выше выражения для матриц-столбцов реакций в глобальных осях в матричное уравнение равновесия и получим окончательный вид уравнений

равновесия узла, в которых в качестве неизвестных фигурируют независимые статические параметры стержней:

$$\sum_{\text{ВЫХ}} c_i \cdot T_i^{\text{нач}} \cdot s_i - \sum_{\text{ВХ}} c_j \cdot T_j^{\text{кон}} \cdot s_j + p_{xn} = 0, \quad n=1,2,\dots,NY.$$

Система уравнений равновесия для представленной на рис 9.15 рамы состоит из $3NY=21$ уравнений равновесия узлов и содержит $3NC=18$ неизвестных независимых статических параметров. Эта система уравнений, записанная в блочной матричной форме, имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} c_1 T_1^{\text{нач}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 T_1^{\text{кон}} & c_2 T_2^{\text{нач}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 T_3^{\text{нач}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 T_3^{\text{кон}} & c_4 T_4^{\text{нач}} & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 T_2^{\text{кон}} & 0 & -c_4 T_4^{\text{кон}} & c_5 T_5^{\text{нач}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 T_6^{\text{нач}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_5 T_5^{\text{кон}} & -c_6 T_6^{\text{кон}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь для прозрачности записи опущены нижние индексы глобальных осей возле векторов узловой нагрузки.

Если ввести обозначение для матрицы коэффициентов системы уравнений равновесия, для матриц-столбцов неизвестных независимых статических параметров стержней и узловых нагрузок, то система уравнений равновесия узлов записывается особенно просто:

$$\mathbf{T} \mathbf{s} + \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

$3NY * 3NC \quad 3NC * 1 \quad 3NY * 1 \quad 3NY * 1$

Строка под формулой содержит последовательность размеров входящих в формулу матриц.

9.3.4 Геометрические уравнения: связь обобщенных деформаций стержневых элементов и узловых перемещений

Свяжем обобщенные деформации стержня, соответствующие независимым статическим параметрам стержня, с перемещениями узлов конструкции. Внутренние усилия в начальном и конечном сечениях стержня после выделения стержня из конструкции переходят в разряд внешних по отношению к выделенному стержню сил. Этим силам энергетически соответствуют перемещения центров торцевых сечений стержня, которые приняты совпадающими с перемещениями начального и конечного узлов рассматриваемого стержня. Ситуацию иллюстрирует рис.9.19.

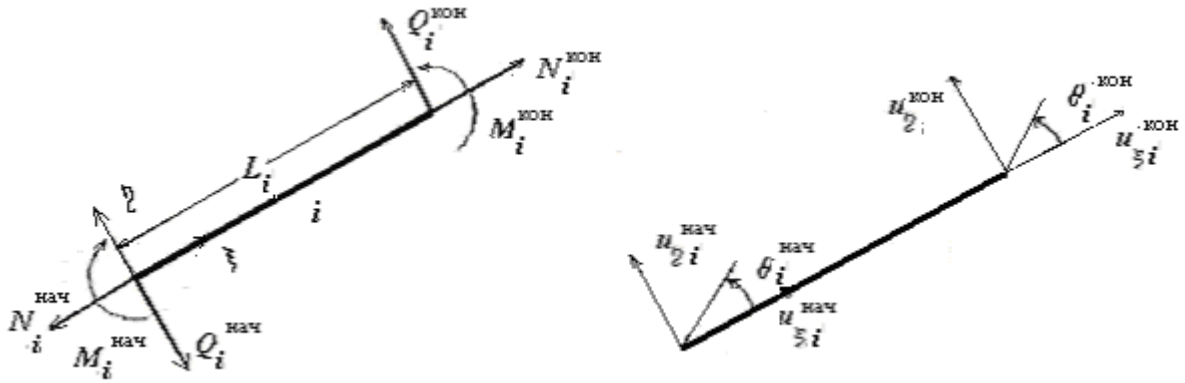


Рис.9.19 Действующие на стержень силы и соответствующие им перемещения

Составим возможную работу приложенных к стержню сил на соответствующих им перемещениях:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -N_i^{\text{нач}} u_{\xi i}^{\text{нач}} - Q_i^{\text{нач}} u_{\eta i}^{\text{нач}} - M_i^{\text{нач}} \theta_i^{\text{нач}} + N_i^{\text{кон}} u_{\xi i}^{\text{кон}} + Q_i^{\text{кон}} u_{\eta i}^{\text{кон}} + M_i^{\text{кон}} \theta_i^{\text{кон}} = \\ &= -(\mathbf{s}_i^{\text{нач}})^T \cdot \mathbf{u}_{\xi i}^{\text{нач}} + (\mathbf{s}_i^{\text{кон}})^T \cdot \mathbf{u}_{\xi i}^{\text{кон}}. \end{aligned}$$

Подставим в выражение возможной работы следующие соотношения:

$$\mathbf{s}_i^{\text{нач}} = \mathbf{T}_i^{\text{нач}} \mathbf{s}_i; \quad \mathbf{s}_i^{\text{кон}} = \mathbf{T}_i^{\text{кон}} \mathbf{s}_i; \quad \mathbf{u}_{\xi i}^{\text{нач}} = \mathbf{c}_i^T \mathbf{u}_{x i}^{\text{нач}}; \quad \mathbf{u}_{\xi i}^{\text{кон}} = \mathbf{c}_i^T \mathbf{u}_{x i}^{\text{кон}}.$$

После надлежащих преобразований выражение для возможной работы принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -(\mathbf{s}_i)^T \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{нач}})^T \cdot \mathbf{c}_i^T \cdot \mathbf{u}_{x i}^{\text{нач}} + (\mathbf{s}_i)^T \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{кон}})^T \cdot \mathbf{c}_i^T \cdot \mathbf{u}_{x i}^{\text{кон}} = \\ &= (\mathbf{s}_i)^T \left\{ -(\mathbf{T}_i^{\text{нач}})^T \cdot \mathbf{c}_i^T \cdot \mathbf{u}_{x i}^{\text{нач}} + (\mathbf{T}_i^{\text{кон}})^T \cdot \mathbf{c}_i^T \cdot \mathbf{u}_{x i}^{\text{кон}} \right\}. \end{aligned}$$

Теперь возможная работа выражена через независимые статические параметры стержня и соответствующие им энергетически обобщенные деформации. Отсюда получаем формулы для обобщенных деформаций, представляющие собой искомую связь между обобщенными деформациями стержня и узловыми перемещениями:

$$\mathbf{e}_i = -(\mathbf{T}_i^{\text{нач}})^T \cdot \mathbf{c}_i^T \cdot \mathbf{u}_{x i}^{\text{нач}} + (\mathbf{T}_i^{\text{кон}})^T \cdot \mathbf{c}_i^T \cdot \mathbf{u}_{x i}^{\text{кон}}.$$

Узловые перемещения в полученной формуле не имеют индекса реальных номеров начального и конечного узлов стержня. При составлении всей группы геометрических уравнений для всех стержней конструкции опустим верхние индексы “нач” и “кон” в матрицах столбцах перемещений и введем индексы реальных номеров в общей нумерации всех узлов конструкции для тех узлов, которые для i -того элемента являются начальным и конечным. Естественно, что необходимая информация о связи узлов и элементов вновь предоставляется матрицей инцидентий \mathbf{I}_{Y-C} .

Итак, следующие $3NC$ уравнений являются геометрическими уравнениями и составляют вторую группу полной системы уравнений стержневой конструкции.

$$\mathbf{e}_i = -(\mathbf{T}_i^{\text{нач}})^T \cdot \mathbf{c}_i^T \cdot \mathbf{u}_{\text{xn}} + (\mathbf{T}_i^{\text{кон}})^T \cdot \mathbf{c}_i^T \cdot \mathbf{u}_{\text{xn}}, \quad i = 1, 2, \dots, NC$$

Система геометрических уравнений для рамы с жесткими узлами, приведенной на рис. 9.15, записывается в блочной матричной форме с учетом структуры матрицы инцидентий таким образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_5 \\ \mathbf{e}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{T}_1^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_1^T & (\mathbf{T}_1^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(\mathbf{T}_2^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{T}_2^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(\mathbf{T}_3^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_3^T & -(\mathbf{T}_3^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_3^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(\mathbf{T}_4^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_4^T & (\mathbf{T}_4^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_4^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(\mathbf{T}_5^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_5^T & \mathbf{0} & (\mathbf{T}_5^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_5^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(\mathbf{T}_6^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_6^T & (\mathbf{T}_6^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_6^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_5 \\ \mathbf{u}_6 \\ \mathbf{u}_7 \end{pmatrix}$$

В последней формуле для простоты опущены индексы глобальных осей возле матриц-столбцов узловых перемещений.

Сравнивая структуру уравнений равновесия со структурой геометрических уравнений, обнаруживаем, что матрицей коэффициентов геометрических уравнений является транспонированная матрица коэффициентов уравнений равновесия. С учетом этого обстоятельства набор геометрических уравнений для всех стержней конструкции можно записать в компактной форме следующим образом:

$$\mathbf{e} = -\mathbf{T}^T \mathbf{u}$$

$$3NC * 1 \quad 3NC * 3NY \quad 3NY * 1$$

Строка под формулой содержит последовательность размеров входящих в формулу матриц.

9.3.5 Определяющие уравнения, связывающие обобщенные деформации и независимые статические параметры стержневых элементов

Следующая группа соотношений устанавливает связь между независимыми статическими параметрами и соответствующими им обобщенными деформациями стержня. Эти соотношения, как любые соотношения между внутренними усилиями или напряжениями и деформациями, являются физическими по своей природе, поскольку зависят от свойств материала стержня и выражающих эти свойства механических характеристик. Запишем известное выражение потенциальной энергии i -того стержня с прямолинейной осью, материал которого подчиняется закону Гука, через внутренние усилия:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N_i^2(\xi)}{EF_i} + \frac{Q_i^2(\xi)}{GF_{vi}} + \frac{M_i^2(\xi)}{EI_i} \right) d\xi.$$

Рассматриваем стержень конструкции, жестко прикрепленный к узлам. Выразим внутренние усилия в текущем сечении стержня с координатой ξ через усилия в начальном сечении, рис.9.20:

$$N_i(\xi) = N_i^{\text{нач}}; \quad Q_i(\xi) = Q_i^{\text{нач}}; \quad M_i(\xi) = M_i^{\text{нач}} - Q_i^{\text{нач}} \cdot L_i.$$

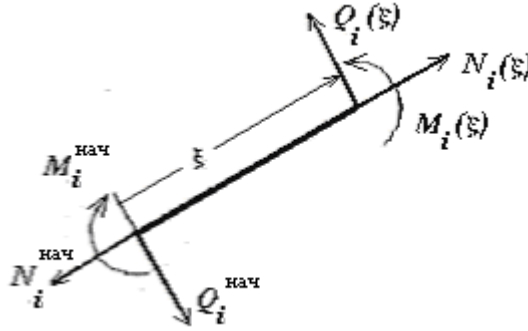


Рис.9.20 Внутренние усилия в текущем сечении стержня

Выше в качестве независимых статических параметров, определяющих напряженное состояние жестко закрепленного по концам стержня, были приняты усилия $S_{1i} = N_i^{\text{нач}}$, $S_{2i} = M_i^{\text{нач}}$ и $S_{3i} = M_i^{\text{кон}}$. Усилия в начальном сечении выражаются через независимые статические параметры, как $N_i^{\text{нач}} = S_{1i}$, $M_i^{\text{нач}} = S_{2i}$ и $Q_i^{\text{нач}} = (S_{2i} - S_{3i})/L_i$, так что внутренние усилия в текущем сечении можно также записать через независимые статические параметры следующим образом:

$$N_i(\xi) = S_{1i}; \quad Q_i(\xi) = \frac{S_{2i} - S_{3i}}{L_i}; \quad M_i(\xi) = S_{2i} \left(1 - \frac{\xi}{L_i} \right) + S_{3i} \frac{\xi}{L_i}.$$

Обобщенные деформации стержня, соответствующие независимым статическим параметрам, определим по теореме Кастильяно, составляя производные от потенциальной энергии деформации последовательно по каждому из параметров:

$$e_{1i} = \frac{\partial U_i}{\partial S_{1i}} = \int_0^{L_i} \frac{N_i(\xi)}{EF_i} \cdot \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial S_{1i}} d\xi = \frac{S_{1i} \cdot L_i}{EF_i};$$

$$e_{2i} = \frac{\partial U_i}{\partial S_{2i}} = \int_0^{L_i} \left\{ \frac{Q_i(\xi)}{GF_{vi}} \cdot \frac{\partial Q_i(\xi)}{\partial S_{2i}} + \frac{M_i(\xi)}{EI_i} \cdot \frac{\partial M_i(\xi)}{\partial S_{2i}} \right\} d\xi = \int_0^{L_i} \left\{ \frac{1}{GF_{vi}} \frac{S_{2i} - S_{3i}}{L_i} \cdot \frac{1}{L_i} \right\} d\xi +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{L_i} \left\{ \frac{1}{EI_i} \left[S_{2i} \left(1 - \frac{\xi}{L_i} \right) + S_{3i} \cdot \frac{\xi}{L_i} \right] \cdot \left(1 - \frac{\xi}{L_i} \right) \right\} d\xi = S_{2i} \left(\frac{L_i}{3EI_i} + \frac{1}{GF_{vi}L_i} \right) + S_{3i} \left(\frac{L_i}{6EI_i} - \frac{1}{GF_{vi}L_i} \right); \\
e_{3i} &= \frac{\partial U_i}{\partial S_{3i}} = \int_0^{L_i} \left\{ \frac{Q_i(\xi)}{GF_{vi}} \cdot \frac{\partial Q_i(\xi)}{\partial S_{3i}} + \frac{M_i(\xi)}{EI_i} \cdot \frac{\partial M_i(\xi)}{\partial S_{3i}} \right\} d\xi = \int_0^{L_i} \left\{ -\frac{1}{GF_{vi}} \frac{S_{2i} - S_{3i}}{L_i} \cdot \frac{1}{L_i} \right\} d\xi + \\
& + \int_0^{L_i} \left\{ \frac{1}{EI_i} \left[S_{2i} \left(1 - \frac{\xi}{L_i} \right) + S_{3i} \cdot \frac{\xi}{L_i} \right] \cdot \frac{\xi}{L_i} \right\} d\xi = S_{2i} \left(\frac{L_i}{6EI_i} - \frac{1}{GF_{vi}L_i} \right) + S_{3i} \left(\frac{L_i}{3EI_i} + \frac{1}{GF_{vi}L_i} \right).
\end{aligned}$$

Окончательно физические уравнения, связывающие независимые статические параметры и соответствующие им обобщенные деформации принимают следующий вид:

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} e_{1i} \\ e_{2i} \\ e_{3i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{L_i}{EF_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_i}{3EI_i} + \frac{1}{GF_{vi}L_i} & \frac{L_i}{6EI_i} - \frac{1}{GF_{vi}L_i} \\ 0 & \frac{L_i}{6EI_i} - \frac{1}{GF_{vi}L_i} & \frac{L_i}{3EI_i} + \frac{1}{GF_{vi}L_i} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ S_{3i} \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{s}_i.$$

Здесь введена матрица податливости стержня \mathbf{F}_i , которая, если не учитывать влияние деформации сдвига, выглядит так

$$\mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} \frac{L_i}{EF_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_i}{3EI_i} & \frac{L_i}{6EI_i} \\ 0 & \frac{L_i}{6EI_i} & \frac{L_i}{3EI_i} \end{Bmatrix}.$$

9.3.6 Граничные условия: условия закрепления стержневой конструкции

До сих пор при составлении уравнений стержневой конструкции совершенно не принималось во внимание, что реальная стержневая конструкция всегда закреплена на плоскости. В действительности перемещения опорных узлов все, если узел жестко заделан, или частично в случае шарнирного опирания известны и равны нулю. Перемещения по направлению опорных связей могут быть также заданы равными начальным смещениям опорных точек.

Рассмотрим здесь только простейший вариант граничных условий, соответствующий случаю конструкции, закрепленной на плоскости с помощью жестких не смещаемых опорных связей. Количество неизвестных перемещений для такой конструкции оказывается равным $NZ=3NY-NC_0$, а в матрице-столбце узловых перемещений

соответственно появляются нулевые обобщенные перемещения. Уравнения равновесия опорных узлов по направлению опорных связей не составляются, поэтому число уравнений в системе уравнений равновесия также сокращается. Таким образом, для учета жестких опорных связей необходимо в матрице-столбце \mathbf{u} узловых перемещений вычеркнуть нулевые элементы, соответствующие закрепленным степеням свободы, а также преобразовать матрицу \mathbf{T} коэффициентов уравнений равновесия узлов и матрицу-столбец узловых нагрузок, вычеркнув строки, соответствующие уравнениям равновесия по направлению закрепленных степеней свободы. При этом очевидным образом изменится структура и количество уравнений совместности деформаций и перемещений. Физические уравнения не претерпевают изменений, поскольку касаются только стержневых элементов конструкции.

Рама, представленная на рис.9.15, имеет три опорные узла, причем все три узла жестко закреплены. В связи с этим сокращается число неизвестных узловых перемещений, матрица-столбец неизвестных перемещений принимает вид $\hat{\mathbf{u}} = \{\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_4 \mathbf{u}_5 \mathbf{u}_7\}$, а система уравнений равновесия узлов с учетом закрепления опорных узлов выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -c_1 \mathbf{T}_1^{\text{кон}} & c_2 \mathbf{T}_2^{\text{нач}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -c_3 \mathbf{T}_3^{\text{кон}} & c_4 \mathbf{T}_4^{\text{нач}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -c_2 \mathbf{T}_2^{\text{кон}} & \mathbf{0} & -c_4 \mathbf{T}_4^{\text{кон}} & c_5 \mathbf{T}_5^{\text{нач}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -c_5 \mathbf{T}_5^{\text{кон}} & -c_6 \mathbf{T}_6^{\text{кон}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_4 \\ \mathbf{s}_5 \\ \mathbf{s}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{p}_5 \\ \mathbf{p}_7 \end{pmatrix}.$$

9.3.7 Набор определяющих параметров и полная система уравнений, описывающая напряженно-деформированное состояние стержневой конструкции

В заключение подведем итог сказанному в этой главе.

Напряженно-деформированное состояние плоской рамы с жесткими узлами полностью определяется следующим набором параметров:

$\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \dots \mathbf{s}_{\text{NC}}\}$ – независимые статические параметры всех стержневых элементов, составляющие матрицу-столбец размером $3\text{NC} \times 1$;

$\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{\text{NC}}\}$ – обобщенные деформации всех стержневых элементов, составляющие матрицу-столбец размером $3\text{NC} \times 1$;

$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_{\text{NY}}\}$ – перемещения и углы поворота в глобальных осях всех узлов рамы, образующие матрицу-столбец размером $3\text{NY} \times 1$.

Все перечисленные параметры связаны уравнениями, образующими следующую систему:

$\mathbf{T}\mathbf{s} + \mathbf{p} = \mathbf{0}$ – уравнения равновесия в глобальных осях всех жестких узлов рамы, составляющие систему алгебраических уравнений с матрицей коэффициентов \mathbf{T} , имеющей размеры $3NY*3NC$;

$\mathbf{e} + \mathbf{T}^T \mathbf{u} = \mathbf{0}$ – уравнения совместности перемещений узлов и обобщенных деформаций стержней, составляющие систему алгебраических уравнений с матрицей коэффициентов размером $3NC*3NY$;

$\mathbf{e} = \mathbf{F}\mathbf{s}$ – физические соотношения, связывающие обобщенные деформации и независимые статические параметры стержней; эти соотношения составляют систему алгебраических уравнений, в которых роль матрицы коэффициентов играет квазидиагональная блочная матрица податливости всех стержней конструкции размером $3NC*3NC$.

Полная система уравнений состоит из $3NY+3NC+3NC$ уравнений, связывающих $3NY+3NC+3NC$ статических и геометрических параметров.

Система уравнений дополняется граничными условиями – условиями закрепления конструкции на плоскости. Необходимо задать некоторое число нулевых (или начальных, отличных от нуля) узловых обобщенных перемещений, соответствующих связям конструкции. Число заданных перемещений в соответствии с числом опорных связей NC_0 должно быть достаточным для неподвижного закрепления рамы на плоскости, то есть равным, по крайней мере, трем. С учетом опорных связей число неизвестных узловых перемещений оказывается равным $NZ=NY-NC_0$, соответственно число уравнений равновесия узлов равно также $NY-NC_0$, поскольку уравнения равновесия узлов в направлении опорных связей не составляются. Таким образом, в конечном итоге полная система уравнений плоской рамы с жесткими узлами оказывается системой $3NY-NC_0+3NC+3NC$ алгебраических уравнений относительно $3NY-NC_0+3NC+3NC$ неизвестных параметров.

В разделе 7, посвященном расчету ферм, составлена полная система уравнений для плоской фермы. Если обратиться к этим уравнениям, то нетрудно заметить, что полная система уравнений для фермы и полученная в этом разделе полная система уравнений для рамы состоят из трех групп уравнений и записываются совершенно одинаково. При этом размеры столбцов статических и геометрических параметров, размеры и структура матрицы \mathbf{T} (матрицы коэффициентов системы уравнений равновесия узлов) и матрицы \mathbf{F} (матрицы податливости стержневых элементов конструкций) различаются. Это различие связано с различием в характере работы конструкций и их элементов. Напомним, что напряженное состояние стержней фермы определяется лишь одним параметром - продольной силой, в то время как напряженное состояние стержней рамы определяется тремя независимыми статическими параметрами. Обобщенной деформацией стержня фермы является абсолютное удлинение стержня, в то время, соответствующими трем статическим параметрам. Наконец, положение узла фермы на плоскости при деформации фермы характеризуется проекциями перемещений на глобальные оси, положение же узла деформированной рамы определяется проекциями перемещений на глобальные оси и поворотом малой

окрестности узла. Соответственно, различаются и уравнения. Для каждого узла фермы составляются уравнения равновесия проекций на глобальные оси, для узла рамы к этим уравнениям равновесия добавляется уравнение моментов относительно центра узла. Для каждого стержня фермы составляется одно уравнение совместности деформации стержня и узловых перемещений, а для стержня рамы составляется три таких уравнения. Наконец, в стержне фермы продольная сила связана с продольной деформацией одним физическим уравнением, в то время, как в стержне рамы записываются три уравнения, связывающие три независимых статических параметра стержня и три его обобщенных деформации.

Можно было бы построить полную систему уравнений для плоской стержневой системы общего вида с включением наряду с жесткими соединениями шарнирных соединений в узлах, с учетом размеров узлов, с учетом упругоподатливых связей в узлах и упругоподатливых опорных связей. Во всех этих случаях полная система уравнений состоит из тех же трех групп уравнений и набор столбцов неизвестных параметров остается неизменным, изменяются лишь размеры и структура матриц \mathbf{T} и \mathbf{F} и размеры матриц-столбцов неизвестных статических и геометрических параметров. Ситуация сохраняется и в случае пространственных стержневых систем.

9.3.8 Разрешающие уравнения полной системы уравнений в усилиях. Уравнения метода сил

Для получения разрешающих уравнений в усилиях необходимо исключить из полной системы уравнений деформации и перемещения. С помощью уравнений закона Гука исключаем вначале деформации, подставляя их выражение через усилия в уравнения связи между деформациями и перемещениями. Полная система уравнений приводится к виду:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\mathbf{s} + \mathbf{p} &= \mathbf{0}; \\ \mathbf{F}\mathbf{s} + \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Система уравнений равновесия состоит из $3NY$ уравнений относительно NC неизвестных усилий, при этом число уравнений равновесия в статически неопределимой ферме меньше числа неизвестных - $3NY < NC$. Разность между числом неизвестных и числом уравнений - $NS = NC - 3NY$ - это степень статической неопределимости фермы. Такая система уравнений имеет множество решений, если, конечно, в матрице \mathbf{T} найдется хотя бы один квадратный невырожденный блок размера $3NY * 3NY$. С другой стороны, система уравнений для определения перемещений оказывается переопределенной, поскольку число неизвестных обобщенных перемещений - $3NY$ меньше числа уравнений связи деформаций и перемещений, равного NC . Тем не менее, полное число неизвестных усилий и перемещений - $NC + 3NY$ - равно полному числу уравнений.

Пусть матрица коэффициентов \mathbf{T} системы уравнений равновесия имеет квадратный невырожденный блок \mathbf{T}_1 , в таком случае эту матрицу можно представить в виде:

$$\mathbf{T} = \left\| \mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_x \right\|.$$

В соответствии с этим столбец усилий \mathbf{s} можно разделить на блоки $\{\mathbf{s}_1 \quad \mathbf{x}\}$ и система уравнений равновесия разворачивается таким образом:

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{s}_1 + \mathbf{T}_x \mathbf{x} + \mathbf{p} = \mathbf{0}.$$

- *Выделение квадратного невырожденного блока в матрице системы уравнений равновесия и разделение столбца усилий на два блока соответствует построению основной статически неопределимой системы метода сил и назначению лишних неизвестных метода сил, объединяемых в столбец \mathbf{x} .*
- *Выбор основной системы метода сил не является единственным и определяется числом квадратных невырожденных блоков в матрице системы уравнений равновесия.*

Выделив соответствующие блоки и в матрице податливости \mathbf{F} , перепишем NC уравнений связи деформаций и перемещений в таком виде:

$$\mathbf{F}_1 \mathbf{s}_1 + \mathbf{T}_1^T \mathbf{u} = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{F}_x \mathbf{x} + \mathbf{T}_x^T \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Проанализируем возможность решения этой переопределенной системы уравнений относительно перемещений \mathbf{u} . Матрица-столбец перемещений выражается через усилия путем решения первой группы уравнений, поскольку транспонированная матрица \mathbf{T}_1^T , также как и матрица \mathbf{T}_1 , является невырожденной:

$$\mathbf{u} = -(\mathbf{T}_1^T)^{-1} \cdot \mathbf{F}_1 \mathbf{s}_1.$$

Но определенные таким образом $3NY$ обобщенных перемещений должны удовлетворять и второй группе $NC-3NY$ уравнений. Подставим полученное выражение для перемещений во вторую группу уравнений:

$$\mathbf{F}_x \mathbf{x} - \mathbf{T}_x^T \cdot (\mathbf{T}_1^T)^{-1} \cdot \mathbf{F}_1 \mathbf{s}_1 = \mathbf{0}.$$

Переопределенная система уравнений для определения перемещений имеет решение только в том случае, если усилия \mathbf{s}_1 и \mathbf{x} , удовлетворяющие при любом наборе неизвестных уравнениям равновесия, удовлетворяют полученной системе уравнений.

- *Условие разрешимости уравнений связи между перемещениями и деформациями относительно перемещений имеет смысл уравнений совместности деформаций стержней, записанных в усилиях.*

Уравнение совместности деформаций в усилиях можно записать еще и так:

$$\left\| \begin{array}{c} -\mathbf{T}_x^T \cdot (\mathbf{T}_1^T)^{-1} \\ \mathbf{E} \end{array} \right\| \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{0}.$$

Таким образом, получена разрешающая система уравнений в усилиях относительно NC неизвестных усилий, состоящая из $3NY$ уравнений равновесия и $NC-3NY=NS$ уравнений совместности деформаций в усилиях.

- Система разрешающих уравнений в усилиях имеет вид:

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{s}_1 + \mathbf{T}_x \mathbf{x} + \mathbf{p} = \mathbf{0};$$

$$-\mathbf{T}_x^T \cdot (\mathbf{T}_1^T)^{-1} \mathbf{F}_1 \mathbf{s}_1 + \mathbf{F}_x \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Путем решения этой системы уравнений порядка NC определяются одновременно все усилия в стержнях фермы.

Порядок разрешающей системы уравнений в усилиях можно понизить, если дополнительно с помощью уравнений равновесия исключить из этой системы уравнений усилия \mathbf{s}_1 и получить разрешающие уравнения для определения неизвестных \mathbf{x} .

- Метод решения задачи в усилиях, когда задача сводится к построению и дальнейшему решению разрешающих уравнений относительно части усилий – "лишних" неизвестных \mathbf{x} – является методом сил.

Обращая квадратный невырожденный блок \mathbf{T}_1 , решаем уравнения равновесия относительно усилий \mathbf{s}_1 , выражая эти усилия через остальные усилия \mathbf{x} – "лишние" неизвестные метода сил – и заданную нагрузку:

$$\mathbf{s}_1 = -(\mathbf{T}_1^{-1}) \cdot \mathbf{T}_x \mathbf{x} - (\mathbf{T}_1^{-1}) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}.$$

Теперь полный столбец \mathbf{s} усилий во всех стержнях ферм – определяется следующей матричной формулой:

$$\mathbf{s} = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{x} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} -(\mathbf{T}_1^{-1}) \cdot \mathbf{T}_x \\ \mathbf{E} \end{array} \right\| \cdot \mathbf{x} + \left\| \begin{array}{c} -(\mathbf{T}_1^{-1}) \\ \mathbf{0} \end{array} \right\| \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0},$$

или после введения очевидных обозначений:

$$\mathbf{s} = \mathbf{B}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B}_p \mathbf{p}.$$

Введем также новые обозначения "лишних" неизвестных в столбце неизвестных усилий:

$$\mathbf{x} = \{X_1 X_2 \dots X_{NS}\}.$$

В выражении $\mathbf{s} = \mathbf{B}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B}_p \mathbf{p}$ первое слагаемое $\mathbf{s}_1 = \mathbf{B}_1 \mathbf{x}$ определяет бесконечное множество решений системы однородных уравнений равновесия, то есть таких полей

самоуравновешенных усилий в конструкции, которые существуют в отсутствие внешней нагрузки и удовлетворяют уравнениям равновесия узлов этой конструкции при любых значениях элементов матрицы-столбца \mathbf{x} . Второе слагаемое $\mathbf{s}_p = \mathbf{V}_p \mathbf{p}$ представляет собой решение, соответствующее нагрузке.

- *Выражение $\mathbf{s} = \mathbf{V}_1 \mathbf{x} + \mathbf{V}_p \mathbf{p}$ является общим решением системы уравнений равновесия узлов*
- *Таким образом, получен алгоритм формирования матриц \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_p , который позволяет реализовать расчет от начала до конца автоматически, начиная с формирования матрицы \mathbf{T} по исходным данным о геометрии и топологии конструкции.*

Выбор основной системы путем выделения квадратного невырожденного блока \mathbf{T}_1 , выполнение ряда операций над блоками матрицы \mathbf{T} и формирование всех необходимых новых матриц в принципе можно автоматизировать.

Продолжая решение задачи в усилиях, получим формально известный алгоритм построения уравнений метода сил.

Переходим к нахождению того единственного набора лишних неизвестных, который кроме уравнений равновесия удовлетворяет и уравнениям совместности деформаций.

Система уравнений совместности деформаций в усилиях получена выше в следующей форме:

$$-\mathbf{T}_x^T \cdot (\mathbf{T}_0^T)^{-1} \mathbf{F}_0 \mathbf{s}_0 + \mathbf{F}_x \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

С использованием матрицы \mathbf{V}_1 система уравнений совместности преобразуется к виду:

$$\mathbf{V}_1^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{0}.$$

Подставим теперь общее решение $\mathbf{s} = \mathbf{V}_1 \mathbf{x} + \mathbf{V}_p \mathbf{p}$ системы уравнений равновесия в матричное уравнение совместности деформаций и получим уравнение совместности деформаций, содержащее в качестве неизвестных одни только “лишние” неизвестные усилия:

$$\mathbf{V}_1^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}_1 \mathbf{x} + \mathbf{V}_1^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}_p \mathbf{p} = \mathbf{0}.$$

Система уравнений совместности приобрела известную форму разрешающих уравнений метода сил. Квадратная матрица коэффициентов системы уравнений имеет размер $NS * NS$ и обозначается через \mathbf{D} . Матрица-столбец свободных членов имеет NS строк и обозначается через \mathbf{d}_p . В этих обозначениях система разрешающих уравнений метода сил имеет вид:

$$\mathbf{D} \mathbf{x} + \mathbf{d}_p = \mathbf{0}.$$

- *Система разрешающих уравнений метода сил для определения "лишних" неизвестных усилий представляет собой уравнение совместности деформаций стержней.*

Итак, после составления матриц \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_p дальнейшее решение задачи выполняется в соответствии с алгоритмом метода сил в матричной форме.

9.3.9 Разрешающие уравнения полной системы уравнений в перемещениях

Обратимся к полной системе уравнений стержневой конструкции с жесткими узлами, в которой еще не учтены заданные перемещения. Проведем последовательное исключение статических параметров и обобщенных деформаций стержней с помощью части уравнений. Вначале исключаем обобщенные деформации, подставляя соотношения совместности деформаций и перемещений в физические уравнения:

$$\mathbf{e} + \mathbf{T}^T \mathbf{u} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{e} = \mathbf{F} \mathbf{s} \rightarrow -\mathbf{T}^T \mathbf{u} = \mathbf{F} \mathbf{s}.$$

Решим теперь полученное матричное уравнение относительно вектора статических параметров, для чего придется обратить матрицу податливости стержней конструкции. Матрица податливости стержней представляет собой блочную квазидиагональную матрицу. Блоками главной квазидиагонали являются матрицы податливости отдельных стержней рамы, имеющие размер 3×3 . Матрица податливости не вырождена и ее обращение сводится к обращению стоящих на главной квазидиагонали блоков. Обратим блок, соответствующий матрице податливости i -того стержня. Для простоты рассмотрим вариант матрицы податливости без учета влияния сдвига. В результате обращения матрицы податливости получаем следующую матрицу жесткости, которая определяет независимые статические параметры стержня через соответствующие им обобщенные деформации:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{F}_i^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{L_i}{EF_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_i}{3EI_i} & \frac{L_i}{6EI_i} \\ 0 & \frac{L_i}{6EI_i} & \frac{L_i}{3EI_i} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} EF_i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_i}{L_i} & -\frac{2EI_i}{L_i} \\ 0 & -\frac{2EI_i}{L_i} & \frac{4EI_i}{L_i} \end{vmatrix}.$$

Матрица-столбец независимых статических параметров всех стержней может быть теперь выражена через матрицу-столбец узловых перемещений следующим образом:

$$\mathbf{s} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{u}.$$

Матрица жесткости всех стержней конструкции также имеет блочную квазидиагональную структуру:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \dots & \mathbf{K}_{nc} \end{bmatrix}$$

Далее остается полученное выражение для матрицы-столбца независимых статических параметров подставить в матричное уравнение, эквивалентное системе уравнение

равновесия всех узлов конструкции. В результате получаем записанную в матричной форме систему уравнений равновесия узлов конструкции в перемещениях:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{u} = \mathbf{p}.$$

$$3NY * 3NC \quad 3NC * 3NC \quad 3NC * 3NY \quad 3NY * 1 \quad 3NY * 1$$

Матрица коэффициентов полученной системы уравнений вырождена и система уравнений не имеет решения, поскольку речь пока идет о не закрепленной на плоскости конструкции. Учет опорных закреплений осуществляется путем описанной выше модификации матриц \mathbf{T} , \mathbf{u} и \mathbf{p} .

Система уравнений равновесия с учетом опорных закреплений записывается с использованием модифицированных матриц:

$$\hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{T}}^T \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{p}}.$$

$$(3NY - NC_0) * 3NC \quad 3NC * 3NC \quad 3NC * (3NY - NC_0) \quad (3NY - NC_0) * 1 \quad (3NY - NC_0) * 1$$

Цепочка выражений под системой уравнений показывает изменившиеся при учете опорных закреплений размеры матриц. Система уравнений равновесия свободных узлов конструкции имеет невырожденную матрицу и может быть решена, в результате чего определяется матрица-столбец обобщенных перемещений свободных узлов:

$$\hat{\mathbf{u}} = (\hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{T}}^T)^{-1} \cdot \hat{\mathbf{p}}.$$

Полученная формула может рассматриваться как еще один алгоритм расчета стержневых систем методом перемещений. Последовательность расчета конструкции с использованием этого алгоритма сводится к следующему.

- **Задание исходных данных**

Задаются координаты узлов в глобальной системе координат, характеристики материала стержней, информация об опорных связях, узловые нагрузки.

- **Построение расчетной схемы**

Вводится нумерация узлов, нумерация стержней; локальные оси стержней; строится матрица инцидентий.

- **Формирование исходных матриц**

Строятся матрицы направляющих косинусов стержней; строятся блоки матрицы \mathbf{T} и затем формируется сама матрица коэффициентов уравнений равновесия;

вычисляются геометрические характеристики стержней; строятся блоки матрицы \mathbf{K} и затем формируется сама матрица жесткости; формируется матрица-столбец узловых нагрузок.

▪ **Учет опорных связей**

Модификация исходных матриц, соответствующая учету заданных узловых перемещений – построение матриц $\hat{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{u}}$ и $\hat{\mathbf{p}}$.

▪ **Выполнение цепочки матричных операций и определение неизвестных перемещений свободных узлов конструкции**

$$\hat{\mathbf{u}} = (\hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{T}}^T)^{-1} \cdot \hat{\mathbf{p}}.$$

Представленный алгоритм чрезвычайно прост и подобно алгоритму метода перемещений в форме сложения жесткостей допускает полную формализацию, а вследствие этого автоматизацию расчета. Недостатком данного алгоритма, который не позволяет ему конкурировать с методом перемещений в форме сложения жесткостей, является очень большой размер матриц и, вместе с тем, слабая заполненность матриц.

9.3.10 Разрешающие уравнения полной системы уравнений в перемещениях в форме метода сложения жесткостей

Чтобы избежать указанного недостатка и построить более эффективный алгоритм, выполним в общем виде перемножение матриц в формуле $\mathbf{T} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{T}^T$ для матрицы коэффициентов уравнений равновесия узлов конструкции, записанной без учета опорных закреплений. Поскольку для такой работы имеет большое значение структура матрицы \mathbf{T} , вновь обратимся к примеру расчета рамы, расчетная схема которой представлена на рис.9.15:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{T}^T =$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{T}_1^{\text{нач}} \cdot \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_1 \mathbf{T}_1^{\text{кон}} \cdot \mathbf{K}_1 & \mathbf{c}_2 \mathbf{T}_2^{\text{нач}} \cdot \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c}_3 \mathbf{T}_3^{\text{нач}} \cdot \mathbf{K}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{c}_3 \mathbf{T}_3^{\text{кон}} \cdot \mathbf{K}_3 & \mathbf{c}_4 \mathbf{T}_4^{\text{нач}} \cdot \mathbf{K}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{c}_2 \mathbf{T}_2^{\text{кон}} \cdot \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} & -\mathbf{c}_4 \mathbf{T}_4^{\text{кон}} \cdot \mathbf{K}_4 & \mathbf{c}_5 \mathbf{T}_5^{\text{нач}} \cdot \mathbf{K}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c}_6 \mathbf{T}_6^{\text{нач}} \cdot \mathbf{K}_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{c}_5 \mathbf{T}_5^{\text{кон}} \cdot \mathbf{K}_5 & -\mathbf{c}_6 \mathbf{T}_6^{\text{кон}} \cdot \mathbf{K}_6 \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} (\mathbf{T}_1^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_1^T & -(\mathbf{T}_1^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{T}_2^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(\mathbf{T}_2^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{T}_3^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_3^T & -(\mathbf{T}_3^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_3^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{T}_4^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_4^T & -(\mathbf{T}_4^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_4^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{T}_5^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_5^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{T}_6^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_6^T & -(\mathbf{T}_6^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_6^T \end{pmatrix}.$$

При внимательном рассмотрении перемножаемых матриц замечаем, что их произведение представляет собой сумму шести (по количеству стержней рамы) “расширенных” до размеров $3NY*3NY$ матриц, которые получаются расстановкой блоков матриц вида

$$\left\| \begin{array}{cc} \mathbf{c}_i \mathbf{T}_i^{\text{нач}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_i^T & -\mathbf{c}_i \mathbf{T}_i^{\text{нач}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_i^T \\ -\mathbf{c}_i \mathbf{T}_i^{\text{кон}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_i^T & \mathbf{c}_i \mathbf{T}_i^{\text{кон}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_i^T \end{array} \right\|, i=1,2,\dots,6$$

в соответствии с номерами начального и конечного узлов каждого стержня в общей нумерации узлов конструкции.

Развернем теперь входящие в блоки матрицы матричные произведения и убедимся, что эти произведения представляют собой блоки уже хорошо известной матрицы жесткости стержня в локальных осях конструкции, которая является матрицей реакций стержня. Напомним, что элементами матрицы жесткости являются проекции реакций в начальном и конечном узлах стержня на локальные оси стержня, возникающие от единичных проекций обобщенных перемещений начального и конечного узлов на локальные оси.

$$\mathbf{T}_i^{\text{нач}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{нач}})^T = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L_i & -1/L_i \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{ccc} \frac{EF_i}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_i}{L_i} & -\frac{2EI_i}{L_i} \\ 0 & -\frac{2EI_i}{L_i} & \frac{4EI_i}{L_i} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L_i & 1 \\ 0 & -1/L_i & 0 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} \frac{EF}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_i}{L_i^3} & \frac{6EI_i}{L_i^2} \\ 0 & \frac{6EI_i}{L_i^2} & \frac{4EI_i}{L_i} \end{array} \right\| = \mathbf{R}_{\xi_i}^{\text{нн}};$$

$$-\mathbf{T}_i^{\text{нач}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{кон}})^T = \left\| \begin{array}{ccc} -\frac{EF}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_i}{L_i^3} & \frac{6EI_i}{L_i^2} \\ 0 & -\frac{6EI_i}{L_i^2} & \frac{2EI_i}{L_i} \end{array} \right\| = \mathbf{R}_{\xi_i}^{\text{нк}};$$

$$-\mathbf{T}_i^{\text{кон}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{нач}})^T = \begin{vmatrix} -\frac{EF}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_i}{L_i^3} & -\frac{6EI_i}{L_i^2} \\ 0 & \frac{6EI_i}{L_i^2} & \frac{2EI_i}{L_i} \end{vmatrix} = \mathbf{R}_{\xi_i}^{\text{кн}};$$

$$\mathbf{T}_i^{\text{кон}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{кон}})^T = \begin{vmatrix} \frac{EF}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_i}{L_i^3} & -\frac{6EI_i}{L_i^2} \\ 0 & -\frac{6EI_i}{L_i^2} & \frac{4EI_i}{L_i} \end{vmatrix} = \mathbf{R}_{\xi_i}^{\text{кк}}.$$

Теперь становятся очевидными следующие равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i \mathbf{T}_i^{\text{нач}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_i^T &= \mathbf{R}_{x_i}^{\text{нн}}; & -\mathbf{c}_i \mathbf{T}_i^{\text{нач}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_i^T &= \mathbf{R}_{x_i}^{\text{нк}}; \\ -\mathbf{c}_i \mathbf{T}_i^{\text{кон}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_i^T &= \mathbf{R}_{x_i}^{\text{кн}}; & \mathbf{c}_i \mathbf{T}_i^{\text{кон}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_i^T &= \mathbf{R}_{x_i}^{\text{кк}}; \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{c}_i \mathbf{T}_i^{\text{нач}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_i^T & -\mathbf{c}_i \mathbf{T}_i^{\text{нач}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_i^T \\ -\mathbf{c}_i \mathbf{T}_i^{\text{кон}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{нач}})^T \mathbf{c}_i^T & \mathbf{c}_i \mathbf{T}_i^{\text{кон}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{T}_i^{\text{кон}})^T \mathbf{c}_i^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{R}_{x_i}^{\text{нн}} & \mathbf{R}_{x_i}^{\text{нк}} \\ \mathbf{R}_{x_i}^{\text{кн}} & \mathbf{R}_{x_i}^{\text{кк}} \end{vmatrix} = \mathbf{R}_{x_i}.$$

Из приведенных соотношений следует

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{T}^T = \sum_{i=1}^{\text{NC}} \tilde{\mathbf{R}}_{x_i} = \mathbf{R}.$$

Уравнения равновесия в перемещениях, полученные при решении полной системы уравнений стержневой конструкции, приведены к системе уравнений в форме сложения жесткостей:

$$\sum_{i=1}^{\text{NC}} \tilde{\mathbf{R}}_{x_i} \mathbf{u} = \mathbf{p}.$$

Для получения разрешающих уравнений в перемещениях необходимо учесть граничные условия путем модификации полученных уравнений, о чем подробно сказано **в разделе 8.2**, посвященном алгоритму метода перемещений в форме сложения жесткостей.

Список литературы

1. Гвоздев А.А. Общий метод расчета сложных статически неопределимых систем. М., 1927.
2. Рабинович И.М. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Госстройиздат, 1960.
3. Филин А.П. Матрицы в статике стержневых систем и некоторые элементы использования ЭЦВМ. – Л. – М.: Стройиздат, 1966.
4. Шварц М.А. Построение оптимального смешанного метода строительной механики стержневых систем. Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук. Л., 1974
5. Дарков А.В. и др. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1976.
6. Шварц М. А., Тананайко О.Д. Алгоритмы построения разрешающих систем уравнений для расчета стержневых конструкций. – Строительная механика и расчет сооружений, 1978, №4.
7. Чернева И.М., Тананайко О.Д. О построении системы уравнений для расчета стержневой конструкции произвольного вида. Межвузовский сборник научных трудов.– Исследования по строительной механике. Л., 1978.
8. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы. – М.: Стройиздат, 1981.
9. Филин А.П., Тананайко О.Д., Чернева И.М., Шварц М.А. Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем. – Л: Стройиздат, 1983.
10. Шулькин Ю.Б. Теория упругих стержневых конструкций. М.: Наука, 1984.
11. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1986.
12. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Изд. Ассоциации строительных вузов, 1996.