

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I»
(ФГБОУ ВПО ПГУПС)

А. С. Кухарева, Н. И. Невзоров, Э. Д. Трощенко

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Примеры решения задач

Часть 3

Учебное пособие

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2014

УДК 539.3.8
ББК Ж121
К88

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор кафедры
«Сопротивление материалов и теория упругости»
Санкт-Петербургского института машиностроения (ЛМЗ-ВТУЗ),
Е. В. Соколов;

доцент кафедры «Прочность материалов и конструкций»
ФГБОУ ВПО ПГУПС, кандидат технических наук
С. А. Видюшенков

Кухарева А. С.

К88 Сопротивление материалов. Примеры решения задач. Ч. 3 :
учеб. пособие / А. С. Кухарева, Н. И. Невзоров, Э. Д. Троценков. –
СПб. : ФГБОУ ВПО ПГУПС, 2014. – 50 с.

ISBN 978-5-7641-0661-8

Учебное пособие содержит примеры выполнения контрольных работ из второй части курса сопротивления материалов (косой изгиб, внецентренное сжатие, перемещения при плоском изгибе, статически неопределимые балки, устойчивость сжатых стержней, напряжения и перемещения при поперечном ударе по стержню).

Предназначено для студентов заочной формы обучения.

УДК 539.3.8
ББК Ж121

ISBN 978-5-7641-0661-8 (ч. 3)
ISBN 978-5-7641-0267-2

© Кухарева А. С., Невзоров Н. И.,
Троценков Э. Д., 2014
© ФГБОУ ВПО ПГУПС, 2014

5. КОСОЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ

5.1. Расчет на прочность балок при косом изгибе. Основные понятия

Косой изгиб реализуется, если все нагрузки, приложенные к балке, перпендикулярны ее оси и лежат в одной плоскости, которая проходит через ось стержня и не содержит в себе ни одну из главных центральных осей поперечного сечения (рис. 5.1). В этом случае в поперечном сечении стержня отличны от нуля четыре внутренних усилия: поперечные силы Q_x , Q_y и изгибающие моменты M_x , M_y .

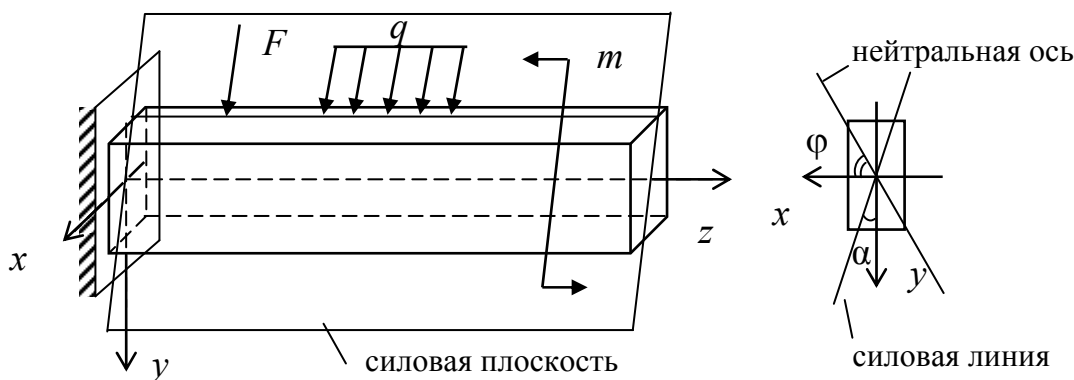


Рис. 5.1

В расчетах на прочность и жесткость поперечными силами, как правило, пренебрегают. Изгибающие моменты выражают через изгибающий момент в силовой плоскости:

$$M_x = M \cos \alpha, M_y = M \sin \alpha, \quad (5.1)$$

где M – изгибающий момент в силовой плоскости; α – угол между осью y и силовой линией.

В выбранной системе координат (рис. 5.1) угол α положительный, если откладывается от оси y против часовой стрелки. На рис. 5.2 показаны положительные углы для разного направления осей координат.

Нормальные напряжения при косом изгибе вычисляются по формуле:

$$\sigma = M \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right). \quad (5.2)$$

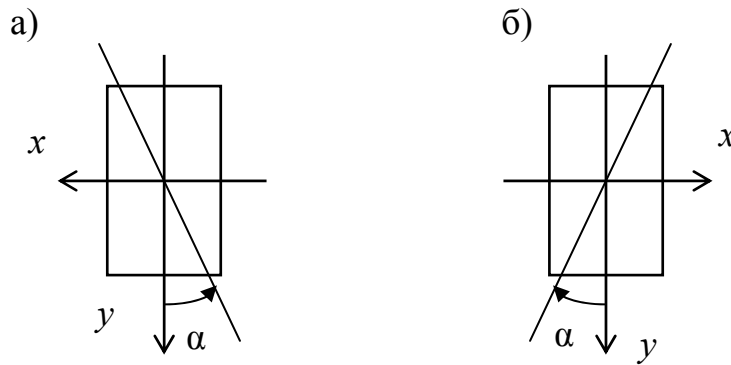


Рис. 5.2

Максимального по модулю значения нормальные напряжения достигают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси. Нейтральная ось – это линия в поперечном сечении, на которой нормальные напряжения равны нулю. Уравнение нейтральной оси имеет вид:

$$y = \frac{I_x \sin \alpha}{I_y \cos \alpha} x. \quad (5.3)$$

Нейтральная ось проходит через начало координат и делит поперечное сечение балки на сжатую и растянутую области.

Угол наклона нейтральной оси к оси x можно найти из соотношения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_x \sin \alpha}{I_y \cos \alpha} = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha. \quad (5.4)$$

Условие прочности при косом изгибе имеет вид:

$$|\sigma|_{\max} = |M|_{\max} \left| \frac{\cos \alpha}{I_x} y_{\text{оп}} - \frac{\sin \alpha}{I_y} x_{\text{оп}} \right| \leq [\sigma], \quad (5.5)$$

где $x_{\text{оп}}$, $y_{\text{оп}}$ – координаты точки, наиболее удаленной от нейтральной оси.

Если поперечное сечение можно вписать в прямоугольник так, чтобы угловые точки сечения совпадали с угловыми точками прямоугольника, то условие прочности можно записать в виде:

$$|\sigma|_{\max} = |M|_{\max} \left(\frac{|\cos \alpha|}{W_x} + \frac{|\sin \alpha|}{W_y} \right) \leq [\sigma]. \quad (5.6)$$

5.2. Подбор сечения балки при косом изгибе

Для заданной балки (рис. 5.3) от нагрузки, действующей в плоскости, отклоненной от вертикали на угол α , необходимо:

1. Построить полную эпюру изгибающих моментов в плоскости действия сил.
 2. Подобрать размеры поперечного сечения, приняв $[\sigma] = 20$ МПа.
 3. Определить положение нейтральной оси.
 4. В опасном сечении построить эпюру нормального напряжения.
- В расчете примем $a = 3$ м, $b = 2$ м, $m = 30$ кНм, $q = 10$ кН/м, $\alpha = 30^\circ$.

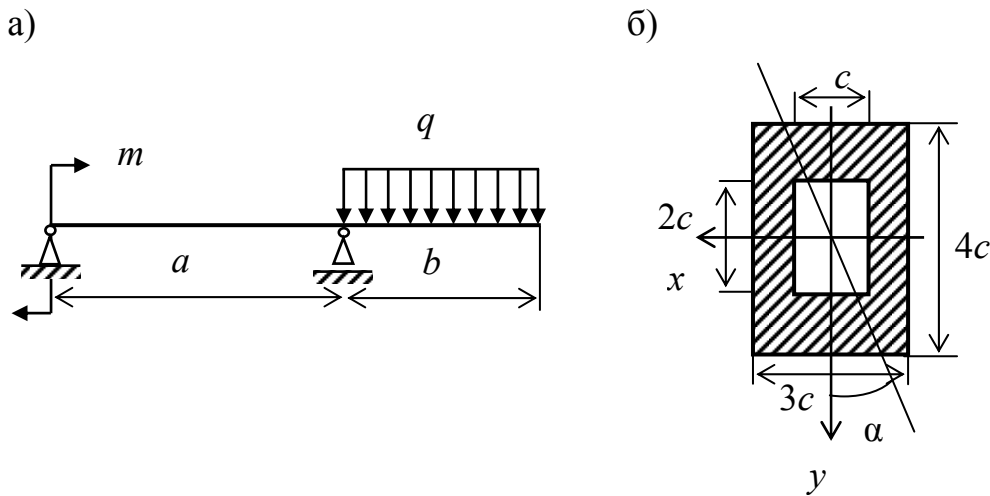


Рис. 5.3

Эпюры поперечной силы и изгибающего момента в силовой плоскости представлены на рис. 5.4. Примеры построения эпюр изгибающего момента рассмотрены в части 2 пособия (примеры 4.1–4.3).

Из эпюры изгибающего момента M определяем, что опасным является сечение над левой опорой, где $M = |M|_{\max} = 30$ кН·м.

Поскольку сечение можно вписать в прямоугольник так, чтобы угловые точки сечения совпадали с угловыми точками прямоугольника, используем условие прочности (5.6), записав его в виде:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_x} (|\cos \alpha| + k |\sin \alpha|) \leq [\sigma], \quad k = \frac{W_x}{W_y},$$

откуда

$$W_x \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} (|\cos \alpha| + k |\sin \alpha|). \quad (5.7)$$

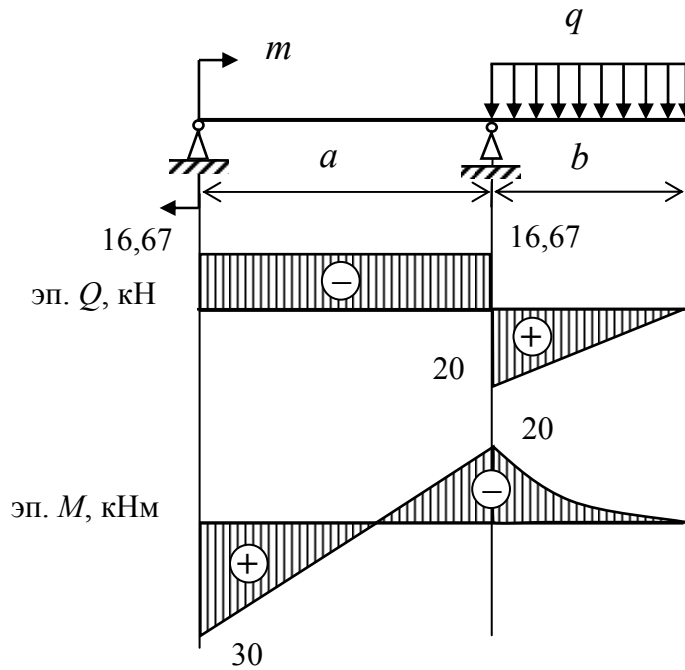


Рис. 5.4

Найдем геометрические характеристики поперечного сечения. Вычислим моменты инерции сечения:

$$I_x = \frac{(4c)^3 3c}{12} - \frac{(2c)^3 c}{12} = \frac{184c^4}{12} = 15,33c^4;$$

$$I_y = \frac{(3c)^3 4c}{12} - \frac{(c)^3 2c}{12} = \frac{106c^4}{12} = 8,83c^4.$$

Вычислим моменты сопротивления и коэффициент k :

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{15,33c^4}{2c} = 7,665c^3; \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{8,83c^4}{1,5c} = 5,887c^3;$$

$$k = \frac{W_x}{W_y} = 1,3,$$

где $x_{\max} = 1,5c$, $y_{\max} = 2c$.

Подставим найденные значения в формулу (5.7) и вычислим параметр c :

$$7,665c^3 = W_x \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} (|\cos \alpha| + k |\sin \alpha|);$$

$$c \geq \sqrt[3]{\frac{|M|_{\max} (|\cos \alpha| + k |\sin \alpha|)}{7,665 [\sigma]}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{30 \text{ кНм} (0,866 + 1,3 \cdot 0,5)}{7,665 \cdot 20 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2}} = 0,067 \text{ м.}$$

Получаем $c = 6,7$ см. Таким образом, подобраны размеры поперечного сечения.

Запишем уравнение нейтральной оси и вычислим угол φ :

$$y = \frac{I_x \sin \alpha}{I_y \cos \alpha} x = 1 \cdot x, \quad \text{tg } \varphi = \frac{I_x}{I_y} \text{tg } \alpha = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Для построения нейтральной оси угол φ откладываем от оси x в ту же сторону, в которую откладывается угол α от оси y , т. е. против часовой стрелки, проводим прямую линию через начало координат (рис. 5.5).

Эпюра нормальных напряжений строится на отрезке, перпендикулярном к нейтральной оси (отрезок AB на рис. 5.5). Через наиболее удаленные от нейтральной оси точки сечения проводят линии, параллельные нейтральной оси. В произвольном масштабе откладывают отрезок AA_1 , определяющий напряжение в точке 1, через точку A_1 и ноль на нейтральной оси проводят прямую линию A_1B_1 . Отрезок BB_1 соответствует напряжению в точке 2.

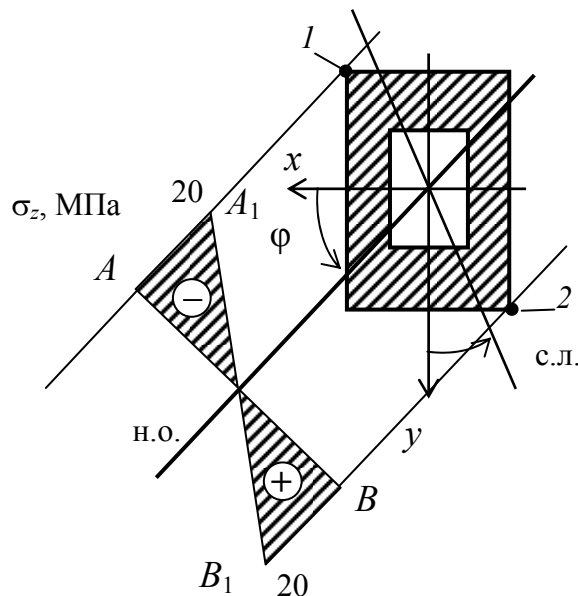


Рис. 5.5

Численные значения напряжений определим по формуле (5.2). Координаты точки 1: $x_{(1)} = 1,5c$, $y_{(1)} = -2c$; координаты точки 2: $x_{(2)} = -1,5c$, $y_{(2)} = c$. Тогда

$$\sigma_{(1)} = M \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y_{(1)} - \frac{\sin \alpha}{I_y} x_{(1)} \right) =$$

$$= 30 \cdot 10^{-3} \left(\frac{0,866 \cdot (-2 \cdot 0,067)}{15,33 \cdot (0,067)^4} - \frac{0,5 \cdot 1,5 \cdot 0,067}{8,83 \cdot (0,067)^4} \right) = -20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = M \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y_{(2)} - \frac{\sin \alpha}{I_y} x_{(2)} \right) =$$

$$= 30 \cdot 10^{-3} \left(\frac{0,866 \cdot 2 \cdot 0,067}{15,33 \cdot (0,067)^4} - \frac{0,5 \cdot (-1,5 \cdot 0,067)}{8,83 \cdot (0,067)^4} \right) = 20 \text{ МПа}.$$

Поскольку сечение имеет две оси симметрии, то напряжения в точках 1 и 2 получились равными по модулю, но противоположными по знаку.

6. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ СТЕРЖНЯ БОЛЬШОЙ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ

6.1. Расчет на прочность внецентренно нагруженных стержней. Основные понятия

При внецентренном действии внешняя сила F параллельна оси стержня, но приложена не в центре тяжести сечения, а в точке C с координатами x_F , y_F (рис. 6.1).

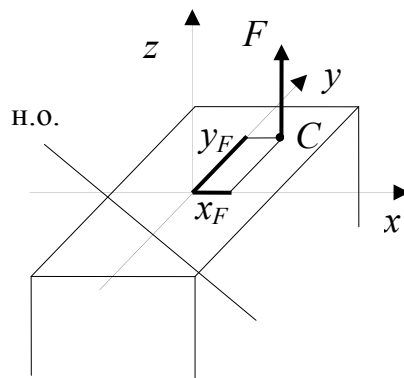


Рис. 6.1

Формула вычисления нормальных напряжений:

$$\sigma_z = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y}{i_x^2} + \frac{x_F x}{i_y^2} \right). \quad (6.1)$$

Уравнение нейтральной оси:

$$1 + \frac{y_F y_0}{i_x^2} + \frac{x_F x_0}{i_y^2} = 0, \quad (6.2)$$

где x_0, y_0 – текущие координаты точек нейтральной оси, в которых нормальные напряжения обращаются в ноль.

Отрезки, отсекаемые нейтральной осью от координатных осей:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_F}. \quad (6.3)$$

Условие прочности внецентренно сжатого стержня:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y_{\text{оп}}}{i_x^2} + \frac{x_F x_{\text{оп}}}{i_y^2} \right) \leq [\sigma], \quad (6.4)$$

где $x_{\text{оп}}, y_{\text{оп}}$ – координаты опасных точек сечения.

Для материала по разному сопротивляющегося растяжению и сжатию условие прочности записывается в виде двух неравенств:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y_{\text{оп}}^p}{i_x^2} + \frac{x_F x_{\text{оп}}^p}{i_y^2} \right) \leq [\sigma]_p; \quad (6.5)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y_{\text{оп}}^c}{i_x^2} + \frac{x_F x_{\text{оп}}^c}{i_y^2} \right) \leq [\sigma]_c, \quad (6.6)$$

где $x_{\text{оп}}^p, y_{\text{оп}}^p$ и $x_{\text{оп}}^c, y_{\text{оп}}^c$ – координаты опасных точек растянутой и сжатой зон соответственно.

6.2. Определение грузоподъемности внецентренно сжатого стержня

На стержень заданного поперечного сечения в точке A действует сжимающая сила F . Требуется определить величину допустимой нагрузки.

Опасными точками растянутой и сжатой зон поперечного сечения стержня являются точки, наиболее удаленные по отношению к нейтральной линии.

Для построения нейтральной линии требуется вычислить главные радиусы инерции площади поперечного сечения стержня.

Главные радиусы инерции площади поперечного сечения стержня вычисляются по формулам

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad (6.7)$$

где I_x , I_y – главные осевые моменты инерции поперечного сечения стержня.

Рассмотрим примеры расчета грузоподъемности внецентренно сжатых стержней большой изгибной жесткости.

Пример 6.1. Поперечное сечение внецентренно сжатого стержня состоит из четырех одинаковых швеллеров № 16 (рис. 6.2, а). Точка C указывает место приложения внецентренной силы F .

Из сортамента «Сталь горячекатаная. Швеллеры (по ГОСТ 8240–97)» (рис. 6.2, б) $I_x = 747 \text{ см}^4$; $I_y = 63,3 \text{ см}^4$; $z_0 = 1,80 \text{ см}$; $b = 6,4 \text{ см}$, $A = 18,1 \text{ см}^2$.

Главные осевые моменты инерции площади поперечного сечения стержня:

$$I_{x0} = 2I_x + 2 \left[I_y + A \left(z_0 + \frac{h}{2} \right)^2 \right] = 2 \cdot 747 + 2 \left[63,3 + 18,1 \cdot 9,8^2 \right] = 5097 \text{ см}^4;$$

$$I_{y0} = 2I_x + 2 \left(I_y + A \cdot \left(\frac{h}{2} - z_0 \right)^2 \right) = 2 \cdot 747 + 2 \left(63,3 + 18,1 \cdot (8 - 1,8)^2 \right) = 3012 \text{ см}^4.$$

Главные радиусы инерции поперечного сечения стержня:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{x0}}{4A}} = \sqrt{\frac{5097}{72,4}} = 8,39 \text{ см}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_{y0}}{4A}} = \sqrt{\frac{3012}{72,4}} = 6,45 \text{ см}.$$

Координаты точки C приложения внецентренной силы F : $x_F = 8 \text{ см}$, $y_F = 8 \text{ см}$ (8 см – это половина высоты стенки швеллера).

Подставляя найденные величины в формулу (6.3), получаем

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{6,45^2}{8} = -5,2 \text{ см}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{8,39^2}{8} = -8,8 \text{ см}.$$

По вычисленным величинам a_x , a_y определяется положение нейтральной линии (рис. 6.2, в).

Координаты опасной точки определяются по чертежу сечения (рис. 6.2, г) $x_{оп} = 8 \text{ см}$, $y_{оп} = (8 + 6,4) = 14,4 \text{ см}$.

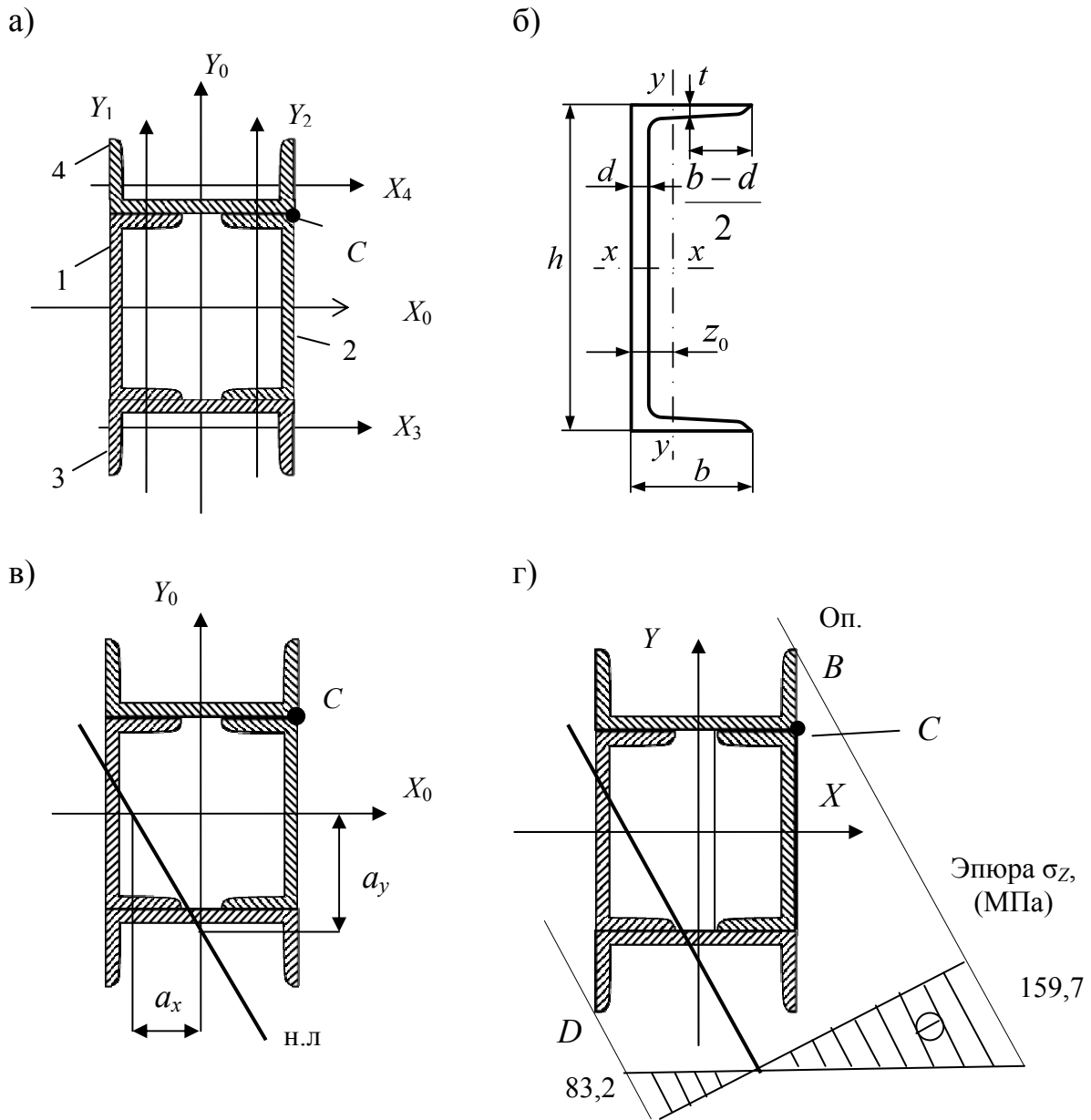


Рис. 6.2

Допустимое значение $[F]$ сжимающей силы определяется по формуле (6.2):

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{4 \cdot 18,1 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{8 \cdot 14,4}{8,39^2} + \frac{8 \cdot 8}{6,45^2} \right) \leq 160;$$

$$[F] \leq \frac{160 \cdot 4 \cdot 18,1 \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{8 \cdot 14,4}{8,39^2} + \frac{64}{6,45^2}} = 0,277 \text{ МН.}$$

Для построения эпюры нормальных напряжений в формулу (6.1) надо подставить координаты точек наиболее удаленных от нейтральной линии:

Точка B :

$$x_B = \frac{h}{2} = 8 \text{ см}; \quad y_B = \frac{h}{2} + b = 8 + 6,4 = 14,4 \text{ см};$$

$$\sigma_B = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y_B}{i_x^2} + \frac{x_F x_B}{i_y^2} \right),$$

или

$$\sigma_B = \frac{-0,277}{4 \cdot 18,1 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{8 \cdot 14,4}{8,39^2} + \frac{8 \cdot 8}{6,45^2} \right) = -159,74 \text{ МПа.}$$

Точка D :

$$x_D = -x_B = -8 \text{ см}, \quad y_D = -y_B = -14,4 \text{ см};$$

$$\sigma_D = \frac{-0,277}{4 \cdot 18,1 \cdot 10^{-4}} \left(1 - \frac{8 \cdot 14,4}{8,39^2} - \frac{8 \cdot 8}{6,45^2} \right) = 83,22 \text{ МПа.}$$

Эпюра нормальных напряжений приведена на рис. 6.2, z .

Пример 6.2. Условие задачи: на стержень заданного поперечного сечения в точке C действует сжимающая сила F . Требуется определить величину допустимой нагрузки. В расчете принять $[\sigma]_p = 10 \text{ МПа}$, $[\sigma]_c = 40 \text{ МПа}$, $c = 5 \text{ см}$.

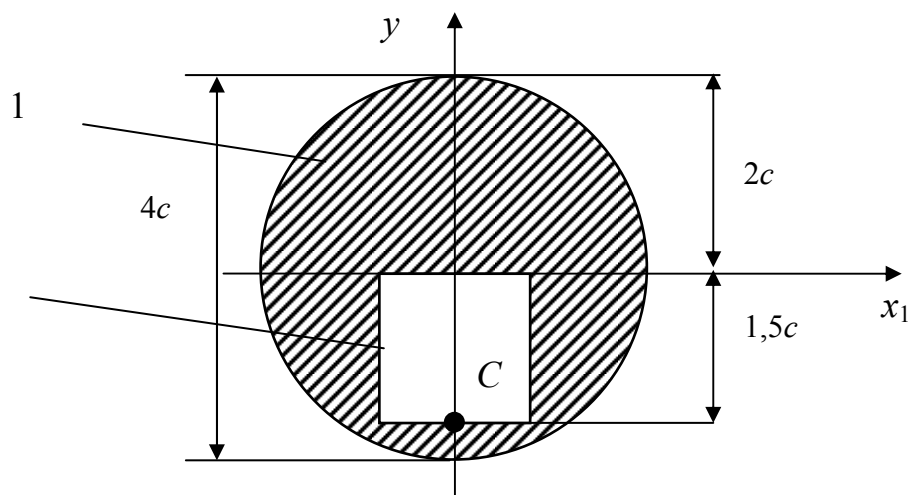
Поперечное сечение внецентренно сжатого стержня приведено на рис. 6.3, a . Сечение имеет одну ось симметрии. Для определения положения второй главной центральной оси необходимо определить ординату центра площади фигуры.

Ордината центра площади плоской фигуры вычисляется по формуле:

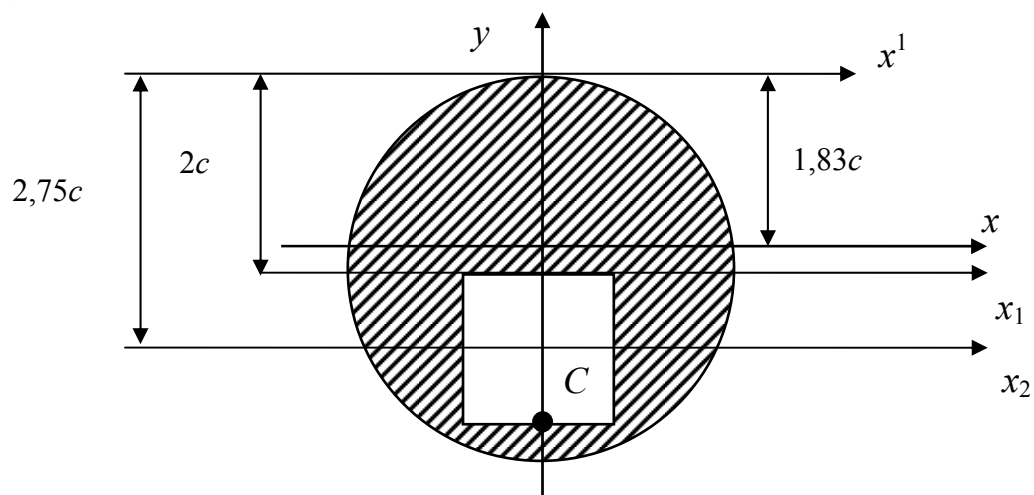
$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2}}{A_1 + A_2},$$

где $A_1 = \pi \cdot (2c)^2$; $A_2 = (1,5c)^2$; $y_{c1} = (-2c)$; $y_{c2} = (-2c - 0,75c)$.

a)



б)



в)

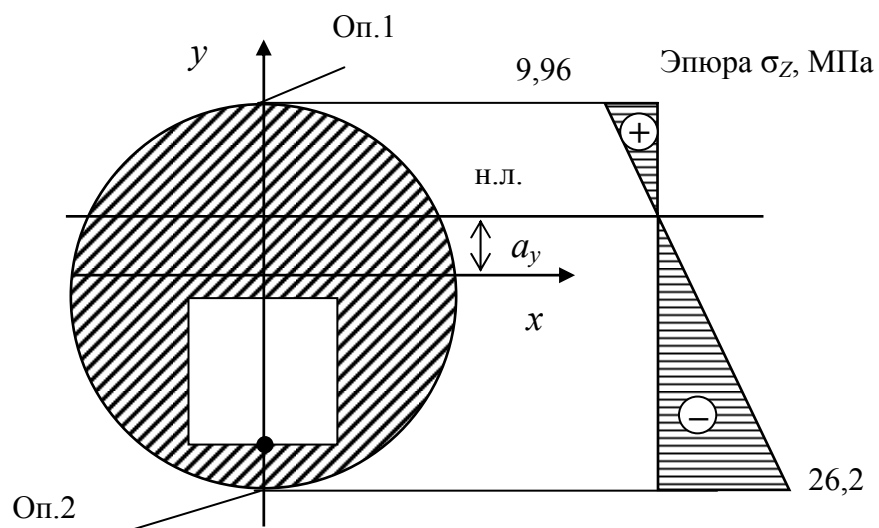


Рис. 6.3

Подставив величины A_1, A_2, y_{c1}, y_{c2} в формулу вычисления y_c , получим

$$y_c = \frac{\pi \cdot (2c)^2 \cdot (-2c) - (1,5c)^2 \cdot (-2c - 0,75c)}{\pi \cdot (2c)^2 - (1,5c)^2} = -1,83c = -9,15 \text{ см.}$$

Главные осевые моменты инерции площади поперечного сечения стержня:

$$\begin{aligned} I_{x0} &= I_x^{(1)} + A^{(1)} (y_1 - y_c)^2 - \left[I_x^{(2)} + A^{(2)} (y_2 - y_c)^2 \right]; \\ I_{x0} &= I_x^{(1)} + A^{(1)} (2c - y_c)^2 - \left[I_x^{(2)} + A^{(2)} (2c + 0,75c - y_c)^2 \right] = \\ &= \frac{\pi(2c)^4}{4} + \pi(2c)^2 [2c - 1,83c]^2 - \\ &- \left[\frac{(1,5c)^4}{12} + (1,5c)^2 (2c + 0,75c - 1,83c)^2 \right] = 10,6c^4; \\ I_{y0} &= I_y^{(1)} - I_y^{(2)} = \frac{\pi(2c)^4}{4} - \frac{(1,5c)^4}{12} = 12,14c^4. \end{aligned}$$

Главные радиусы инерции площади поперечного сечения стержня:

$$\begin{aligned} i_x &= \sqrt{\frac{I_{x0}}{A_1 - A_2}} = \sqrt{\frac{10,6c^4}{\pi(2c)^2 - (1,5c)^2}} = 1,1c; \\ i_y &= \sqrt{\frac{I_{y0}}{A_1 - A_2}} = \sqrt{\frac{12,14c^4}{\pi(2c)^2 - (1,5c)^2}} = 1,085c. \end{aligned}$$

Координаты точки S приложения внецентренной силы F : $x_F = 0$ см; $|y_F| = |1,5c + 2c - 1,83c| = 1,67c$.

Подставляя найденные величины в формулу (6.3), получаем

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{(1,1c)^2}{-1,67c} = 0,66c.$$

С помощью найденной величины a_y определяется положение нейтральной линии (рис. 6.3, в).

Допустимое значение $[F]$ сжимающей силы по растягивающим напряжениям определяется по формуле (6.1):

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y_{\text{оп}}^p}{i_x^2} \right) \leq [\sigma]_p;$$

$$y_{\text{оп}}^p = 1,83c;$$

$$[F]_p \leq \frac{[\sigma]_p \cdot [A_1 - A_2]}{\left(1 + \frac{y_F y_{\text{оп}}^p}{i_x^2}\right)};$$

$$[F]_p \leq \frac{10 \cdot [\pi(2c)^2 - (1,5c)^2]}{1 + \frac{-1,67c \cdot 1,83c}{(1,1c)^2}} = 0,169 \text{ МН.}$$

Допустимое значение $[F]$ сжимающей силы по сжимающим напряжениям определяется по формуле (6.2):

$$\sigma_{\text{min}} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y_{\text{оп}}^c}{i_x^2}\right) \leq [\sigma]_c;$$

$$y_{\text{оп}}^c = -2c - 0,17c = -2,17c;$$

$$[F]_c \leq \frac{[\sigma]_c \cdot [A_1 - A_2]}{1 + \frac{y_F y_{\text{оп}}^c}{i_x^2}};$$

$$[F]_c \leq \frac{40 \cdot [\pi(2c)^2 - (1,5c)^2]}{1 + \frac{-1,67c \cdot (-2,17c)}{(1,1c)^2}} = 158c^2 = 0,258 \text{ МН.}$$

Грузоподъемность стержня по растягивающим напряжениям оказалась значительно меньше, чем грузоподъемность по сжимающим напряжениям.

Окончательно принимаем $[F] = [F]_p = 0,169 \text{ МН.}$

Для построения эпюры нормальных напряжений в формулу (6.1) надо подставить координаты точек наиболее удаленных от нейтральной линии:

Точка Оп.1:

$$x_{\text{оп.1}} = 0; y_{\text{оп.1}} = 1,83c;$$

$$\sigma_{\text{оп.1}} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y_{\text{оп.1}}}{i_x^2} + \frac{x_F x_{\text{оп.1}}}{i_y^2}\right),$$

или

$$\sigma_{\text{оп.1}} = \frac{-0,169}{258 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{-1,67c \cdot 1,83c}{(1,1c)^2}\right) = 9,96 \text{ МПа.}$$

Точка Оп.2:

$$x_{\text{оп.2}} = 0, y_{\text{оп.2}} = -2,17c;$$

$$\sigma_{\text{оп.2}} = \frac{-0,169}{258 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{-1,67c \cdot (-2,17c)}{(1,1c)^2} \right) = -26,2 \text{ МПа.}$$

Эпюра нормальных напряжений приведена на рис. 6.3, в.

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ПЛОСКОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЯ

7.1. Метод Мора

Метод Максвелла – Мора определения перемещений является универсальным методом, справедливым для любых стержневых систем. В частном случае для плоского изгиба балки без учета влияния на перемещения поперечной силы формула Мора принимает вид

$$\Delta = \int_0^l \frac{M(z) \cdot \bar{M}(z)}{EI} dz, \quad (7.1)$$

где Δ – искомое перемещение (это может быть и прогиб, и угол поворота любого сечения); $M(z)$ – изгибающий момент от заданной нагрузки; $\bar{M}(z)$ – изгибающий момент, вызванный единичной силой, соответствующей искомому перемещению; EI – жесткость стержня при изгибе.

Интегрирование ведется по длинам всех участков балки.

Порядок определения перемещений по методу Мора:

1. Определить изгибающий момент $M(z)$ на каждом участке от заданной нагрузки.

2. Освободить балку от заданной нагрузки и загрузить ее единичной обобщенной силой, соответствующей искомому перемещению.

2.1. Для определения вертикального перемещение какой-то точки в этой точке следует приложить вертикально единичную сосредоточенную силу и найти изгибающий момент, вызванный действием только этой силы.

2.2. Для определения угла поворота какого-то сечения в этом сечении следует приложить единичный сосредоточенный момент и найти изгибающий момент от действия только этого момента.

3. Подставить функции изгибающих моментов от нагрузки и от единичной обобщенной силы в интеграл (7.1) и проинтегрировать по всей длине балки.

Если вычисленное перемещение имеет положительный знак, то это означает, что искомое перемещение происходит по направлению, совпадающему с принятым направлением единичной обобщенной силы. Отрицательный знак указывает на то, что действительное перемещение противоположно направлению единичной обобщенной силы.

При вычислении интеграла Мора широко используется графоаналитический метод, называемый способом «перемножения эпюр». Для этого необходимо построить эпюры от заданной нагрузки (грузовая эпюра $M(z)$) и единичной силы (единичная эпюра $\bar{M}(z)$), при этом единичная эпюра является графиком линейной функции.

В том случае, когда грузовая эпюра также является графиком линейной функции (рис. 7.1, а), что соответствует случаю отсутствия распределенной нагрузки на рассматриваемом грузовом участке, для вычисления интеграла Мора методом перемножения эпюр удобно использовать *формулу трапеций*:

$$\Delta = \frac{l}{6EI} (2ac + 2bd + ad + bc). \quad (7.2)$$

Если грузовая эпюра очерчена по квадратной параболе (рис. 7.1, б), что соответствует загрузке равномерно распределенной нагрузкой, то для перемножения эпюр используют *формулу Симпсона*:

$$\Delta = \frac{l}{6EI} (ac + 4ef + bd). \quad (7.3)$$

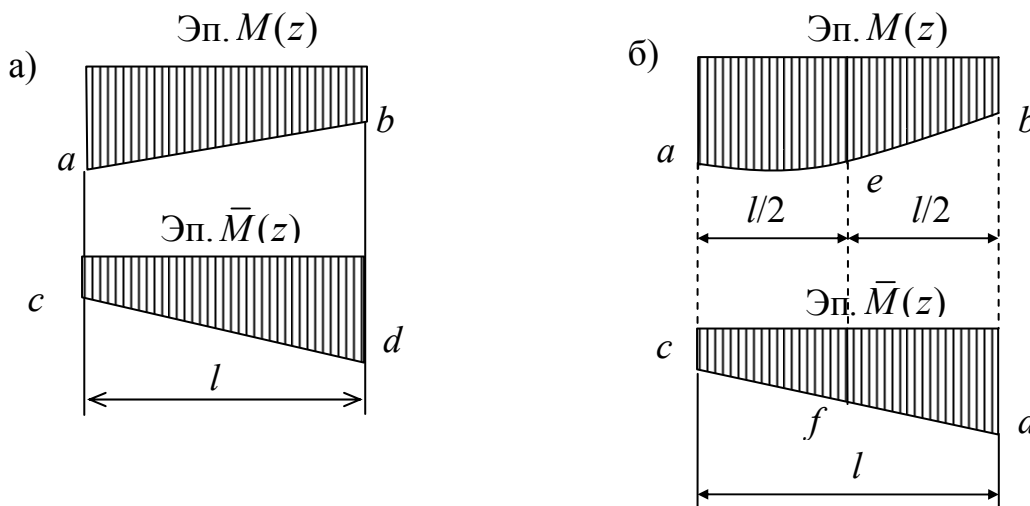


Рис. 7.1

Традиционным в сопротивлении материалов является использование для определения перемещений приема Верещагина, согласно которому для балки

$$\Delta = \frac{\omega \cdot \bar{\eta}}{EI}, \quad (7.4)$$

где ω – площадь грузовой эпюры; $\bar{\eta}$ – ордината единичной эпюры, измеренная под центром площади грузовой эпюры (z_c – абсцисса центра тяжести грузовой эпюры) (рис. 7.2).

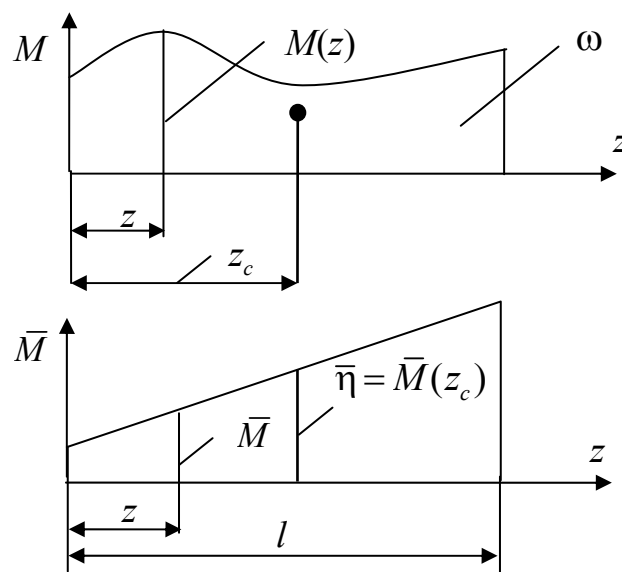


Рис. 7.2

7.2. Применение формул трапеций и Симпсона для определения перемещений

Пример 7.1. Для балки, изображенной на рис. 7.3, а определить вертикальное перемещение v_B сечения B и угол поворота θ_C сечения C . Принять: $a = 2$ м; $b = 2$ м; $F = 15$ кН; $M = 15$ кНм; $q = 15$ кН/м; $EI = 5 \cdot 10^4$ кНм².

Следуем порядку определения перемещений по методу Мора.

1. Строим эпюру изгибающего момента $M(z)$ от заданной нагрузки (рис. 7.3, б). Построение эпюры подробно рассмотрено в примере 4.1 части 2 учебного пособия.

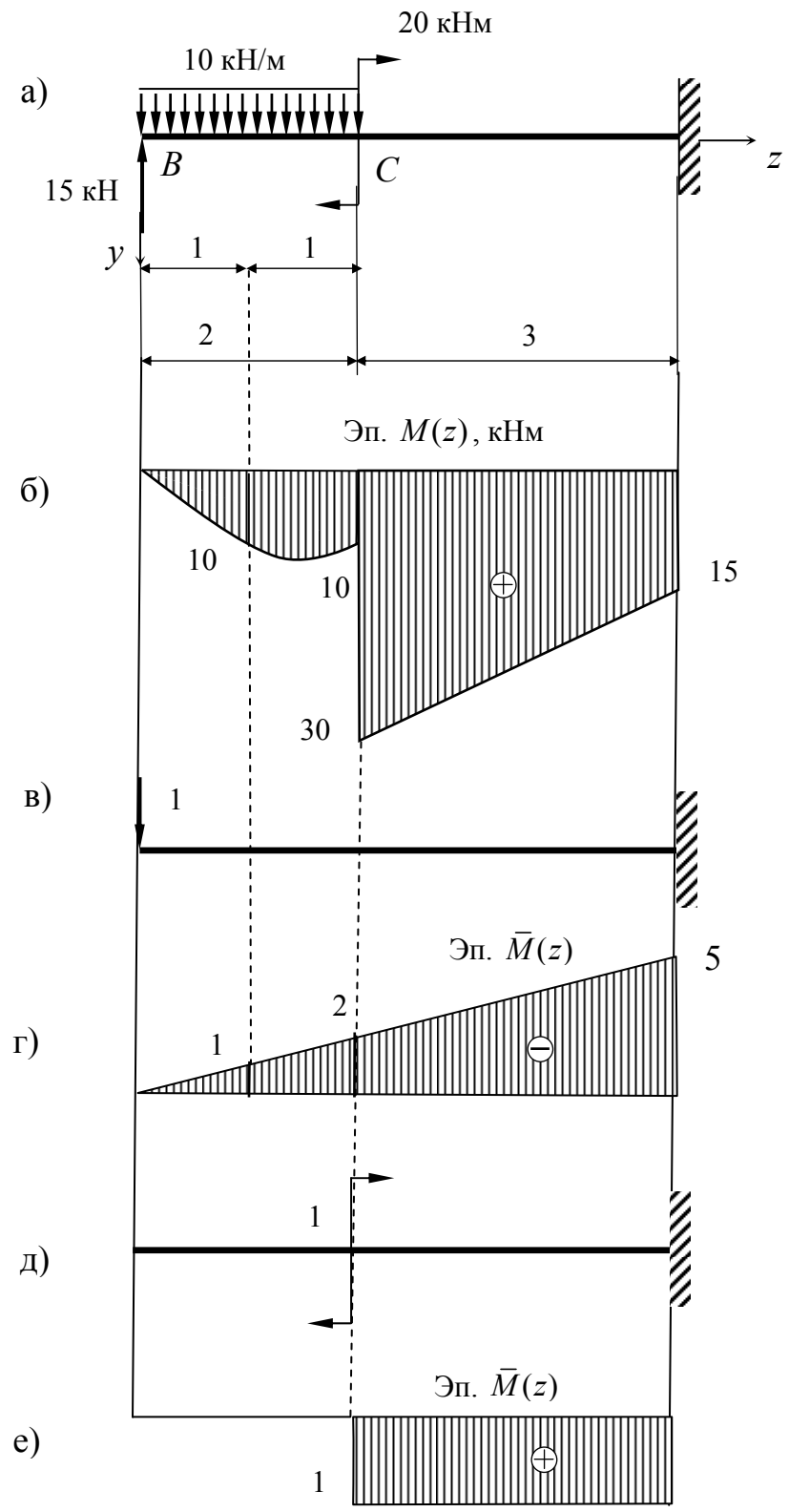


Рис. 7.3

2. Для определения вертикального перемещения сечения B к балке, освобожденной от внешних нагрузок, прикладываем единичную сосредоточенную силу (рис. 7.3, ϵ) и строим единичную эпюру (рис. 7.3, z).

3. Вычисляем интеграл Мора, используя прием «перемножения эпюр». Выделяем на грузовой и единичной эпюрах совпадающие грузовые участки. Для вычисления интеграла Мора на левом участке используем формулу Симпсона (так как грузовая эпюра описывается квадратной параболой), на правом, так как обе эпюры линейные, – формулу трапеций. Искомое вертикальное перемещение получаем суммированием результатов вычислений на всех грузовых участках:

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{2}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 10 \cdot (-1) + 10 \cdot (-2)) + \\ &+ \frac{3}{6EI} (2 \cdot 30 \cdot (-2) + 2 \cdot 15 \cdot (-5) + 30 \cdot (-5) + 15 \cdot (-2)) = \\ &= -\frac{245}{EI} = -4,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -4,9 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Полученный результат имеет отрицательный знак. Это означает, что точка B оси стержня перемещается вверх, противоположно приложенной единичной силе.

1. Для определения угла поворота сечения C к балке, освобожденной от внешних нагрузок, прикладываем единичный сосредоточенный момент (рис. 7.3, δ) и строим единичную эпюру (рис. 7.3, e).

2. Выделяем на грузовой и единичной эпюрах совпадающие грузовые участки. Интеграл Мора на левом участке равен нулю (нулевая единичная эпюра), на правом, так как обе эпюры линейные, применяем формулу трапеций. В результате:

$$\theta_C = \frac{3}{6EI} (2 \cdot 30 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 15 \cdot 1) = \frac{405}{6EI} = 1,35 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Положительный знак результата показывает, что сечение поворачивается в том же направлении, что и приложенный единичный момент.

7.3. Применение приема Верещагина для определения упругих перемещений при изгибе стержней

Рассмотрим примеры вычисления перемещений в балках при плоском изгибе с помощью формулы Верещагина.

Пример 7.2. Однопролетная статически определимая балка нагружена сосредоточенными силой и моментом (рис. 7.4, a). Требуется вычислить прогиб под силой и поворот на левой опоре. Изгибная жесткость балки $EI = \text{const}$.

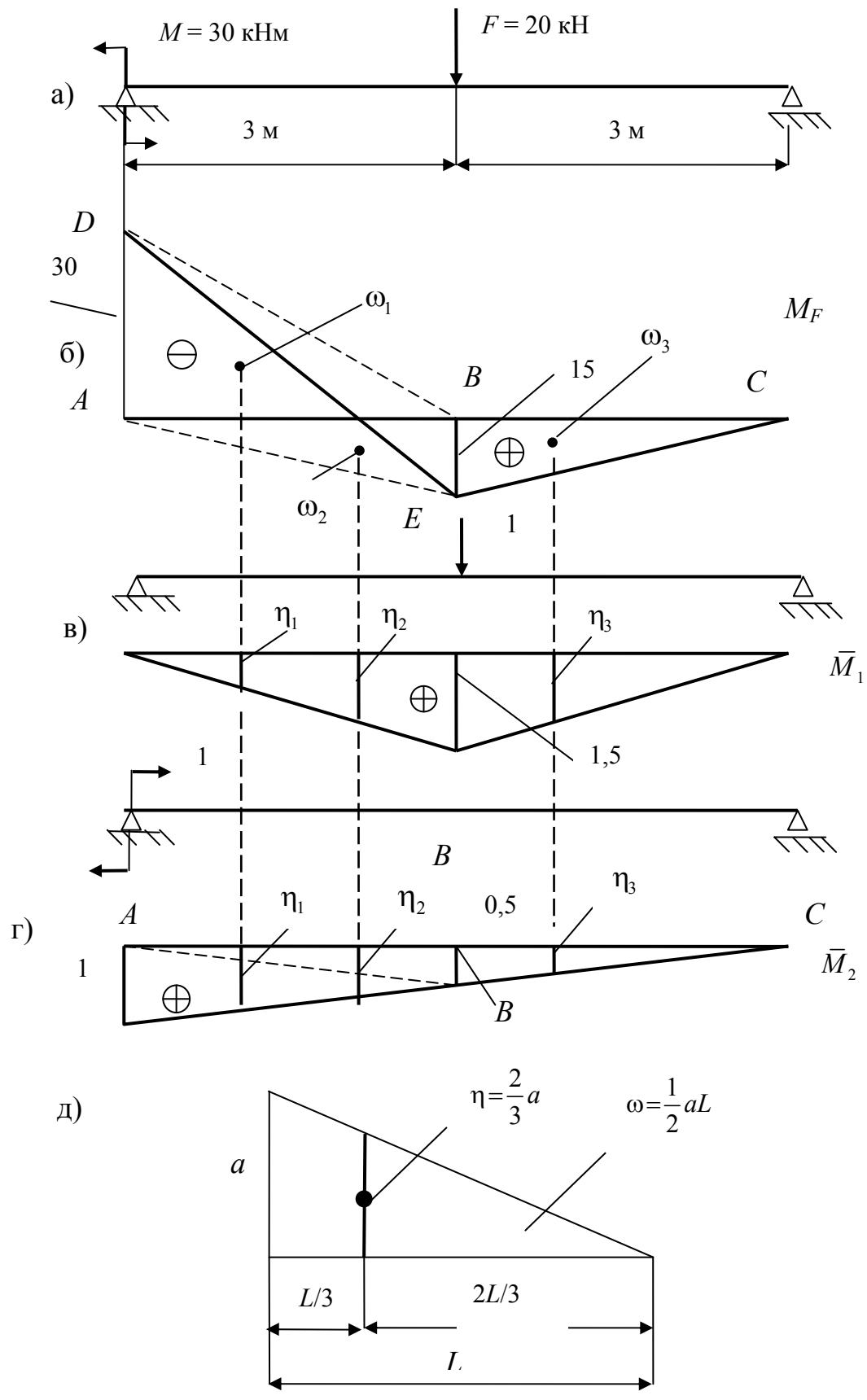


Рис. 7.4

Вычисление прогиба среднего сечения балки

На рис. 7.4, б, в показаны грузовая M_F и единичная эпюры \bar{M}_1 изгибающего момента. Грузовая и единичная эпюры моментов представляют собой кусочно-линейные функции. Для перемножения таких эпюр эпюры удобно представить в виде набора треугольников, для которых известны выражения для вычисления площади и определения положения центра фигуры (рис. 7.4, д). В данном примере имеем два участка – AB и BC – перемножения эпюр. На участке AB разнозначная эпюра грузового момента представляется в виде двух треугольников – ABD и ABE . Искомая величина прогиба вычисляется по формуле:

$$v(3) = \frac{1}{EI} (\omega_1 \cdot \eta_1 + \omega_2 \cdot \eta_2 + \omega_3 \cdot \eta_3),$$

или

$$v(3) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} (-30) \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5 + \frac{1}{2} (15) \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 + \frac{1}{2} (15) \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \right) = \frac{22,5}{EI}.$$

Вычисление поворота опорного сечения А

Для вычисления поворота опорного сечения надо перемножить грузовую M_F и единичную \bar{M}_2 (рис. 7.4, з) эпюры изгибающих моментов. Разбиение эпюр моментов на треугольные фигуры очевидно из чертежа. Искомая величина поворота опорного сечения:

$$\theta(A) = \frac{1}{EI} (\omega_1 \cdot \eta_1 + \omega_2 \cdot \eta_2 + \omega_3 \cdot \eta_3),$$

или

$$\theta(A) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} (-30) \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} (15) \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} (15) \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = -\frac{15}{EI}.$$

Пример 7.3. На рис. 7.5, а показана статически определимая однопролетная балка с консолью, нагруженная по всей длине равномерно распределенной нагрузкой и сосредоточенным моментом на левой опоре. Требуется вычислить прогиб и поворот свободного края консоли. Изгибная жесткость балки $EI = \text{const}$.

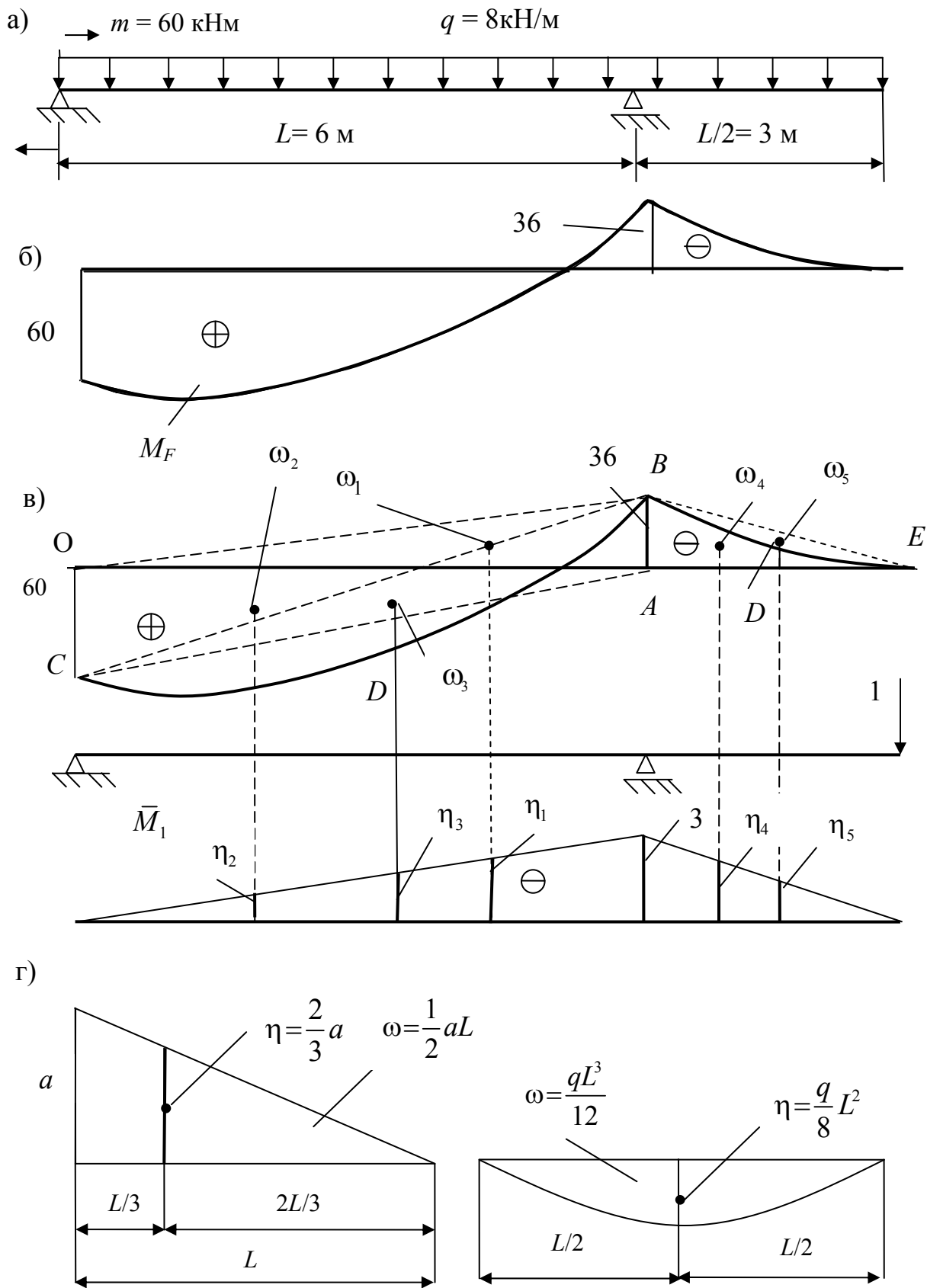


Рис. 7.5

Вычисление прогиба свободного края консоли

На рис. 7.5, б, в показаны грузовая $M_F(z)$ и единичная $\bar{M}_1(z)$ эпюры изгибающих моментов. Грузовая эпюра моментов в пролете балки представляется в виде двух треугольников – OAB и OAC и параболы CDB , для которых известны выражения для вычисления площадей и определения абсцисс центров фигур (рис. 7.5, г). В консольной части балки грузовая эпюра моментов представлена в виде треугольника ABE и параболы BDE . Вычисление площадей ω фигур грузовой эпюры и ординат $\bar{\eta}$ единичной эпюры показано в табл. 7.1.

Таблица 7.1

| № | ω | $\bar{\eta}$ | $\omega \cdot \bar{\eta}$ |
|---|---|--------------------------------------|---------------------------|
| 1 | $\frac{1}{2}OA \cdot (-AB) = -\frac{1}{2}6 \cdot 36 = -108$ | $\bar{\eta}_1 = -\frac{2}{3}3 = -2$ | 216 |
| 2 | $\frac{1}{2}OA \cdot OC = \frac{1}{2}6 \cdot 60 = 180$ | $\bar{\eta}_2 = -\frac{1}{3}3 = -1$ | -180 |
| 3 | $q \frac{OA^3}{12} = 8 \frac{6^3}{12} = 144$ | $\bar{\eta}_3 = -\frac{3}{2} = -1,5$ | -216 |
| 4 | $\frac{1}{2}AE \cdot (-AB) = -\frac{1}{2}3 \cdot 36 = -54$ | $\bar{\eta}_4 = -\frac{2}{3}3 = -2$ | 108 |
| 5 | $-q \frac{AE^3}{12} = -8 \frac{27}{12} = -18$ | $\bar{\eta}_5 = -\frac{3}{2}$ | 27 |

Прогиб свободного края консоли

$$v(9) = \frac{1}{EI} (\omega_1 \cdot \eta_1 + \omega_2 \cdot \eta_2 + \omega_3 \cdot \eta_3 + \omega_4 \cdot \eta_4 - \omega_5 \cdot \eta_5) =$$

$$= \frac{1}{EI} (216 - 180 - 216 + 108 - 27) = -\frac{99}{EI}.$$

Слагаемое $\omega_5 \cdot \eta_5$ в формуле для вычисления $v(9)$ взято со знаком «минус», поскольку площадь грузовой эпюры в пределах консольной части балки определяется как разность площадей треугольника ABE и параболы BDE .

Вычисление поворота свободного края консоли

На рис. 7.6, а, б показаны грузовая M_F и единичная \bar{M}_2 эпюры изгибающих моментов. Разбиение эпюр на простейшие фигуры такое же, как в предыдущем примере. Вычисление площадей ω и ординат $\bar{\eta}$ показано в табл. 7.2.

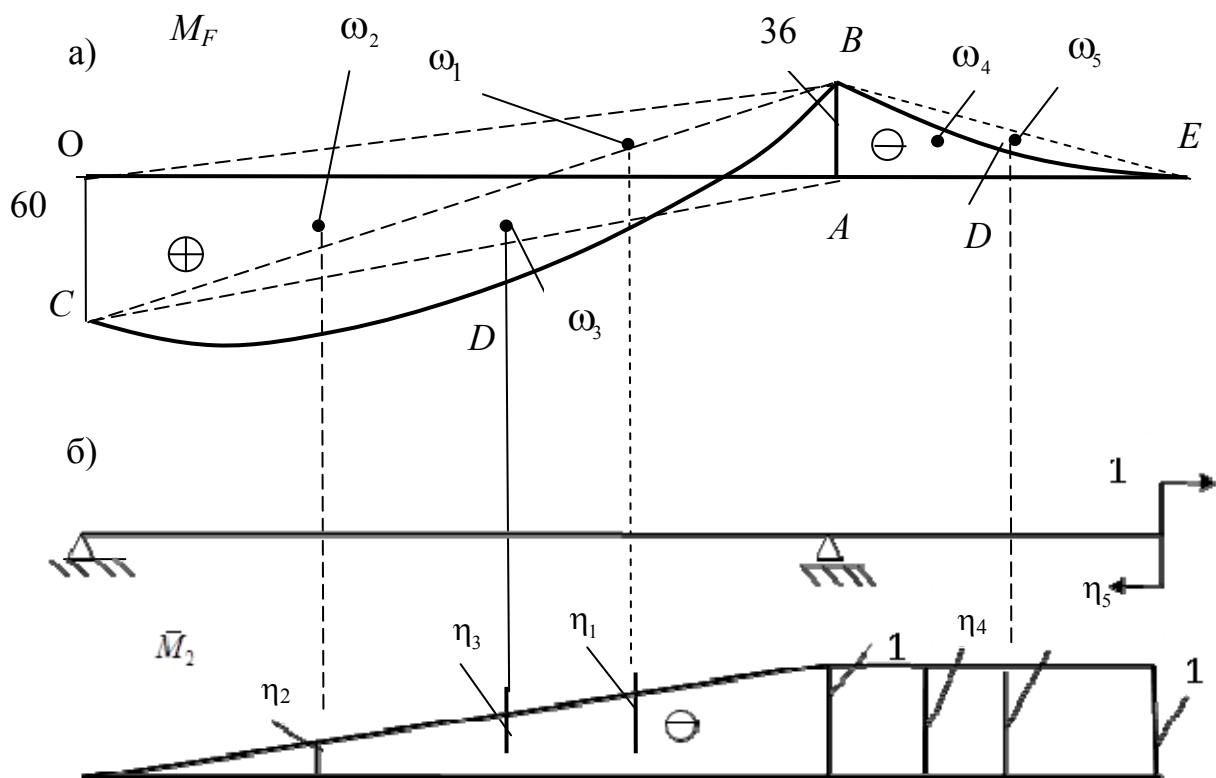


Рис. 7.6

Таблица 7.2

| На рис. 7.6 | ω | $\bar{\eta}$ | $\omega \cdot \bar{\eta}$ |
|-------------|---|--|---------------------------|
| 1 | $\frac{1}{2}OA \cdot (AB) = -\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 36 = -108$ | $\bar{\eta}_1 = -\frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{2}{3}$ | 72 |
| 2 | $\frac{1}{2}OA \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 60 = 180$ | $\bar{\eta}_2 = -\frac{1}{3}$ | -60 |
| 3 | $q \frac{OA^3}{12} = 8 \cdot \frac{6^3}{12} = 144$ | $\bar{\eta}_3 = -\frac{1}{2} = -0,5$ | -72 |
| 4 | $\frac{1}{2}AE \cdot (AB) = -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 36 = -54$ | $\bar{\eta}_4 = -1$ | 54 |
| 5 | $-q \frac{AE^3}{12} = -8 \cdot \frac{27}{12} = -18$ | $\bar{\eta}_5 = -1$ | 18 |

Поворот свободного края консоли:

$$\theta(9) = \frac{1}{EI} (\omega_1 \cdot \eta_1 + \omega_2 \cdot \eta_2 + \omega_3 \cdot \eta_3 + \omega_4 \cdot \eta_4 - \omega_5 \cdot \eta_5);$$

$$\Theta(9) = \frac{1}{EI} (72 - 60 - 72 + 54 - 18) = -\frac{24}{EI}.$$

8. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ ПО ДОПУСТИМЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Статически неопределимыми называются системы, силовые факторы в элементах которых не могут быть определены только из уравнений статики. В таких системах имеется больше связей, чем это необходимо для равновесия – содержатся «лишние» связи. Число лишних связей определяет степень статической неопределимости системы.

Наиболее распространенным методом раскрытия статической неопределимости стержневых систем является *метод сил*, в котором за неизвестные принимают усилия в лишних связях.

Расчет по методу сил выполняют в следующем порядке:

1. Устанавливают степень статической неопределимости системы.
2. Путем удаления лишних связей заменяют исходную систему статически определимой геометрически неизменяемой, называемой *основной системой*. Для одной и той же статически неопределимой системы можно построить несколько основных систем. На рис. 8.1, а показаны возможные варианты выбора основной системы для неразрезной балки, на рис. 8.1, б – для консольной с дополнительной опорой.

3. Основную систему нагружают заданными внешними силами и лишними неизвестными – получают эквивалентную систему.

4. Записывают каноническую систему уравнений метода сил. Для случая один раз статически неопределимых балок эта система сводится к уравнению

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0, \quad (8.1)$$

где X_1 – реакция в удаленной связи («лишняя» неизвестная);

δ_{11} – перемещение по направлению отброшенной связи, вызванное действием единичного значения $\bar{X}_1 = 1$ неизвестной реакции удаленной связи;

Δ_{1F} – перемещение по направлению отброшенной связи, вызванное действием заданной нагрузки.

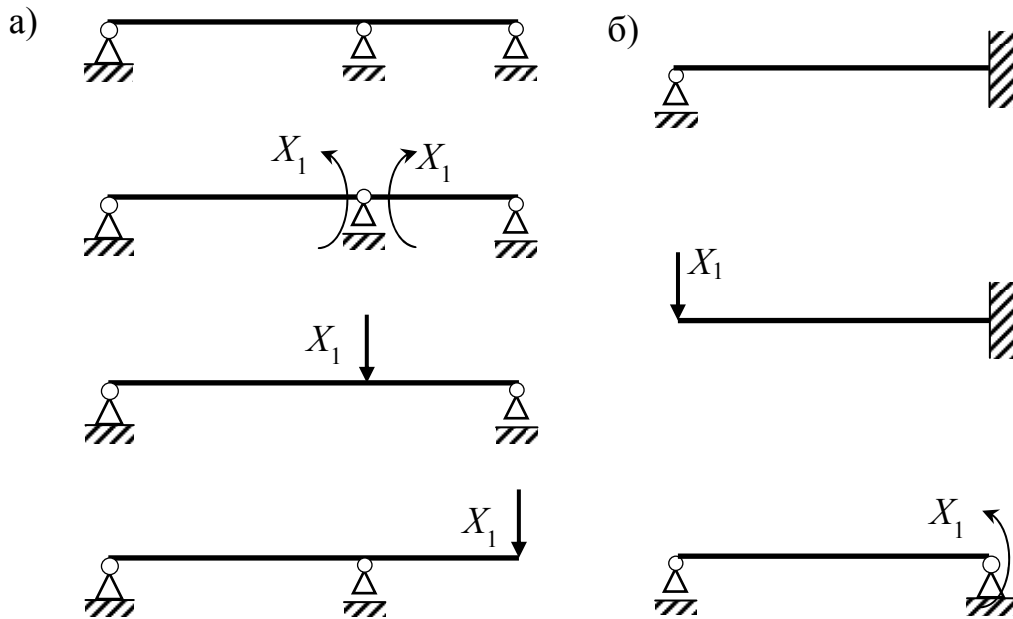


Рис. 8.1

Физический смысл уравнения (8.1) – отсутствие перемещений по направлению удаленной связи, т. е. это уравнение совместности перемещений.

Перемещения δ_{11} и Δ_{1F} обычно определяют по формуле Мора (7.1). Для этого:

- основную систему загружают только единичной обобщенной силой в направлении отброшенной связи и строят единичную эпюру \bar{M}_1 ;
- основную систему нагружают заданными внешними силами и строят грузовую эпюру M_F ;

- вычисляют $\delta_{11} = \int_l \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI} dz$ и $\Delta_{1F} = \int_l \frac{M_F \cdot \bar{M}_1}{EI} dz$, используя для вычисления интеграла способ перемножения эпюр.

5. После вычисления значений лишних неизвестных определяют опорные реакции и строят эпюры внутренних усилий.

Применение метода сил для один раз статически неопределимых балок рассмотрим в следующих примерах.

Пример 8.1. Подобрать двутавровое сечение для балки, изображенной на рис. 8.2. Принять: $F = 20$ кН; $q = 30$ кН/м, $[\sigma] = 160$ МПа.

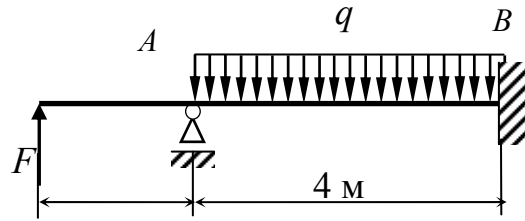


Рис. 8.2

1. Для определения трех опорных реакций R_A , R_B и M_B (рис. 8.3, а) имеются два независимых уравнений статики (третье уравнение статики – сумма проекций сил на ось стержня – выполняется, так как внешние силы ортогональны оси стержня). Система является один раз статически неопределимой.

2. Удаляем лишнюю связь – отбрасываем шарнирно-подвижную опору A . Получаем статически определимую геометрически неизменяемую систему – основную систему метода сил. Прикладывая к ней внешние силы и лишнюю неизвестную, получаем эквивалентную систему (рис. 8.3, б).

3. К основной системе прикладываем единичную силу $\bar{X}_1 = 1$ в направлении отброшенной связи (рис. 8.3, в) и строим единичную эпюру \bar{M}_1 (рис. 8.3, г).

4. Нагружаем основную систему заданными внешними силами (рис. 8.3, д) и строим грузовую эпюру M_F (рис. 8.3, е). Примеры построения эпюр изгибающего момента рассмотрены ранее (часть 2, примеры 4.1–4.3).

5. Записываем каноническое уравнение метода сил для случая один раз статически неопределимой системы $\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0$ и находим его коэффициент и свободный член:

$$\delta_{11} = \int_l \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI_x} dz = \frac{4}{6EI_x} \cdot [0 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) \cdot (-4) + 0 \cdot (-4) + (-4) \cdot 0] = \frac{128}{6EI_x};$$

$$\Delta_{1F} = \int_l \frac{M_F \cdot \bar{M}_1}{EI_x} dz = \frac{4}{6EI_x} \cdot [0 \cdot 40 + 4 \cdot (-2) \cdot 20 + (-4) \cdot (-120)] = \frac{1280}{6EI_x}.$$

Для вычисления δ_{11} использована формула трапеций (7.2), для определения Δ_{1F} применена формула Симпсона (7.3).

Определяем значение лишней неизвестной из канонического уравнения метода сил (8.1):

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1f}}{\delta_{11}} = -10.$$

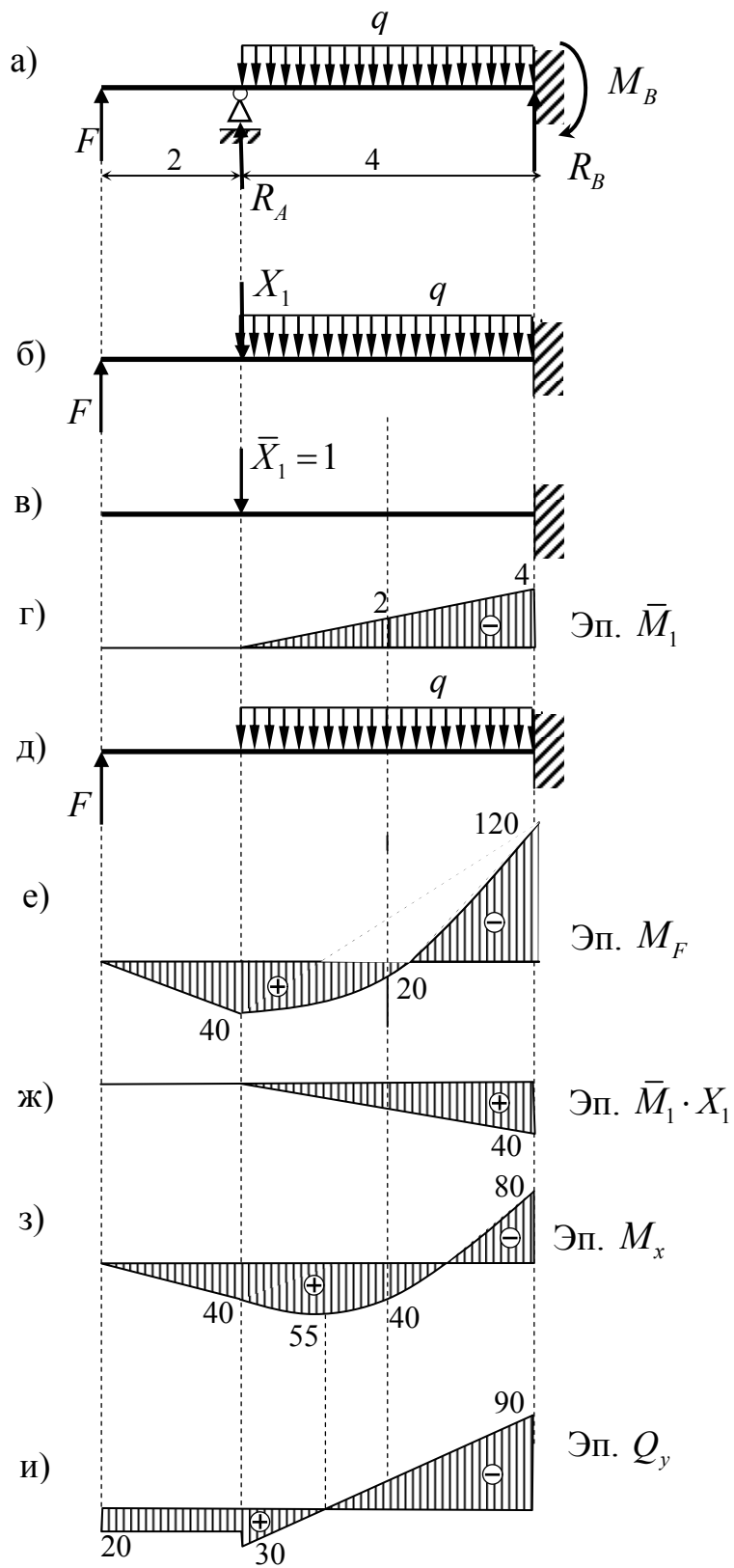


Рис. 8.3

6. Эпюру изгибающего момента M_x для эквивалентной системы получаем, применяя принцип независимости действия сил:

- строим эпюру $\bar{M}_1 \cdot X_1$ (рис. 8.3, ж) умножением ординат единичной эпюры на значение лишней неизвестной;
- суммируя ординаты эпюр M_F и $\bar{M}_1 \cdot X_1$, получаем эпюру $M_x = M_F + \bar{M}_1 \cdot X_1$ (рис. 8.3, з).

7. Делаем кинематическую (деформационную) проверку, т. е. проверяем, что в направлении отброшенной связи отсутствует перемещение:

$$\delta = \int_l \frac{M_x \cdot \bar{M}_1}{EI_x} dz = \frac{4}{6EI_x} \cdot [0 \cdot 40 + 4 \cdot (-2) \cdot 40 + (-4) \cdot (-80)] = 0.$$

Проверка выполнена. При вычислении интеграла Мора использована формула Симпсона (7.3).

8. Вырезая из балки (рис. 8.4, а) грузовые участки бесконечно близкими к их границам сечениями и рассматривая равновесие отсеченных частей (рис. 8.4, б, в), находим поперечную силу Q_y .

Рассмотрим первый грузовой участок (рис. 8.4, б). Составляем уравнение равновесия. Из уравнения – сумма моментов относительно начальной точки участка равна нулю – находим значение поперечной силы в конечном сечении:

$$\sum_i M_i^H = 0 \Rightarrow M_x^K - Q_y^K \cdot a - M_x^H = 0 \Rightarrow Q_y^K = \frac{M_x^K - M_x^H}{a} = \frac{40 - 0}{2} = 20 \text{ кН.}$$

Из уравнения – сумма моментов относительно конечной точки участка равна нулю – находим значение поперечной силы в начальном сечении:

$$\sum_i M_i^K = 0 \Rightarrow M_x^K - Q_y^H \cdot a - M_x^H = 0 \Rightarrow Q_y^H = \frac{M_x^K - M_x^H}{a} = \frac{40 - 0}{2} = 20 \text{ кН.}$$

Аналогично рассматривается второй грузовой участок (рис. 8.4, в).

В результате находим величину поперечной силы в начальном и конечном сечении:

$$\begin{aligned} \sum_i M_i^H = 0 &\Rightarrow M_x^K - Q_y^K \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} - M_x^H = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow Q_y^K &= \frac{M_x^K - M_x^H}{b} - \frac{q \cdot b}{2} = \frac{-80 - 40}{4} - \frac{30 \cdot 4}{2} = -90 \text{ кН;} \end{aligned}$$

$$\sum_i M_i^K = 0 \Rightarrow M_x^K - Q_y^H \cdot b + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} - M_x^H = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_y^H = \frac{M_x^K - M_x^H}{b} + \frac{q \cdot b}{2} = \frac{-80 - 40}{4} + \frac{30 \cdot 4}{2} = 30 \text{ кН.}$$

Эпюра поперечной силы приведена на рис. 8.3, *и*.

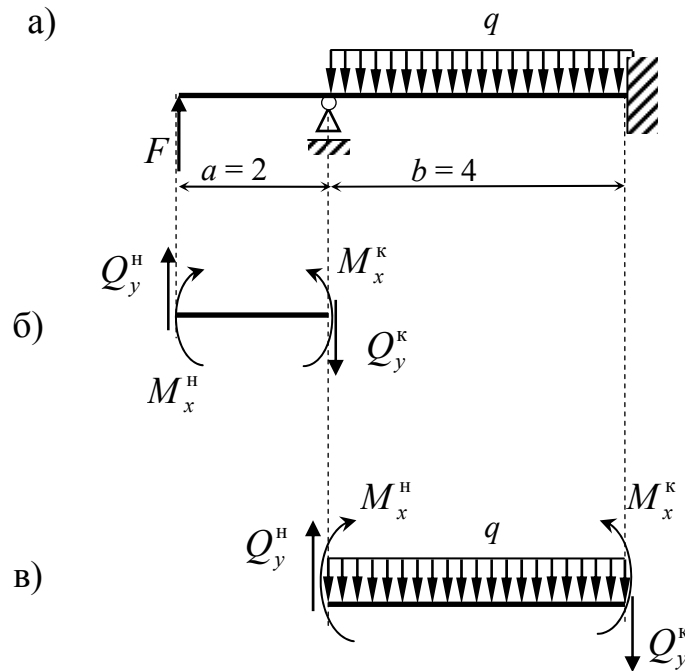


Рис. 8.4

9. Находим опорные реакции, рассматривая равновесие опорных узлов. Вырезаем узел *A* (рис. 8.5, *а*). Из уравнения равновесия – сумма проекций на вертикальную ось равна нулю – находим:

$$Q_y^{(1)} + R_A - Q_y^{(2,н)} = 0 \Rightarrow R_A = Q_y^{(2,н)} - Q_y^{(1)} = 30 - 20 = 10 \text{ кН.}$$

Вырезаем узел *B* (рис. 8.5, *б*). Из уравнения равновесия – сумма проекций на вертикальную ось равна нулю – находим:

$$R_B + Q_y^{(2,к)} = 0 \Rightarrow R_B = -Q_y^{(2,к)} = 90 \text{ кН.}$$

Из уравнения равновесия – сумма моментов относительно точки *B* равна нулю – находим:

$$M_B + M_x^{(2,к)} = 0 \Rightarrow M_B = -M_x^{(2,к)} = 80 \text{ кНм.}$$

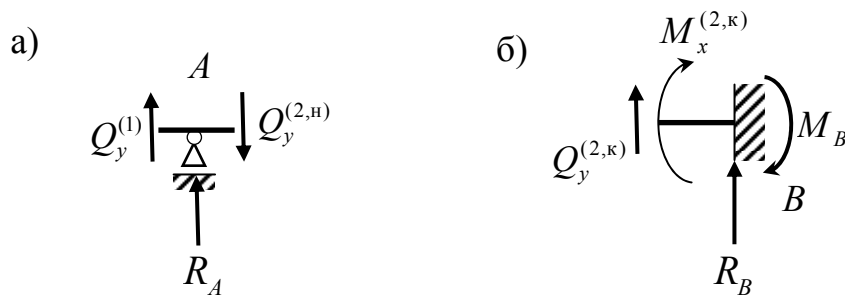


Рис. 8.5

Видно, что значения опорных реакций и опорного момента равны величинам «скачков» на эпюрах Q_y и M_x соответственно. Поэтому достаточно часто величины опорных реакций определяют по скачкам на соответствующих эпюрах без непосредственного рассмотрения равновесия узлов.

10. Делаем статическую проверку. Для этого необходимо проверить выполнение равновесия балки (см. рис. 8.3, а).

Сумма проекций сил на вертикальную ось:

$$F + R_A + R_B - q \cdot 4 = 20 + 10 + 90 - 30 \cdot 4 = 0.$$

Сумма моментов относительно точки приложения силы F :

$$R_A \cdot 2 + R_B \cdot 6 - q \cdot 4 \cdot \left(2 + \frac{4}{2}\right) - M_B = 10 \cdot 2 + 90 \cdot 6 - 30 \cdot 4 \cdot 4 - 80 = 0.$$

Проверка выполнена, балка находится в равновесии.

Необходимо отметить, что статическая неопределимость системы раскрыта правильно только в том случае, когда выполняются как кинематическая, так и статическая проверки.

11. На участке с распределенной нагрузкой есть сечение, в котором поперечная сила равна нулю. Следовательно, в этом сечении изгибающий момент достигает экстремального значения и его необходимо вычислить.

Проводим сечение I (рис. 8.6, а) и рассматриваем равновесие левой отсеченной части (рис. 8.6, б):

$$F + R_A - q \cdot (z - 2) - Q_y = 0 \Rightarrow Q_y = F + R_A - q \cdot (z - 2);$$

$$M_x - F \cdot z - R_A \cdot (z - 2) + q \frac{(z - 2)^2}{2} = 0 \Rightarrow M_x = F \cdot z + R_A \cdot (z - 2) - q \frac{(z - 2)^2}{2}.$$

Из условия равенства нулю поперечной силы находим координату z сечения, в котором изгибающий момент достигает экстремального значения:

$$Q_y = F + R_A - q \cdot (z - 2) = 0 \Rightarrow z - 2 = \frac{F + R_A}{q} \Rightarrow z = \frac{20 + 10}{30} + 2 = 3 \text{ м.}$$

$$\text{При } z = 3 \text{ м } M_x = F \cdot z + R_A \cdot (z - 2) - q \frac{(z - 2)^2}{2} = 55 \text{ кНм.}$$

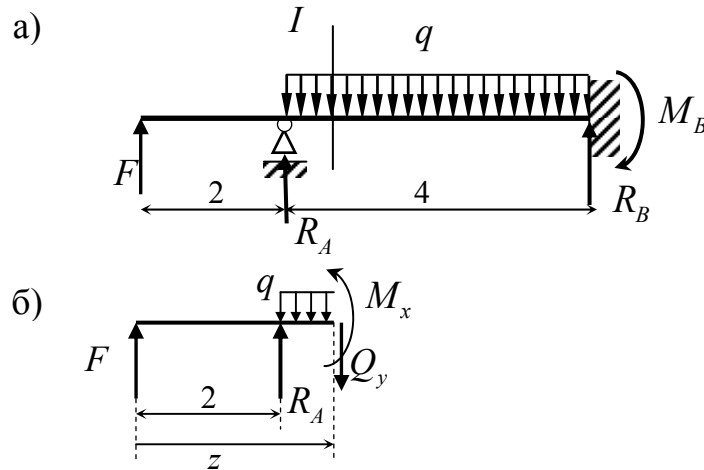


Рис. 8.6

12. Подбираем двутавровое сечение балки. Из условия прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

находим

$$W_x \geq \frac{|M_x|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{80 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 500 \text{ см}^3.$$

По сортаменту (часть 1, приложение I) выбираем двутавр № 33 ($W_x = 597 \text{ см}^3$).

Пример 8.2. Раскрыть статическую неопределимость неразрезной балки, изображенной на рис. 8.7. Принять: $M = 40 \text{ кНм}$; $q = 20 \text{ кН/м}$.

1. Для определения трех опорных реакций – R_A , R_B и R_C (рис. 8.7, а) имеются два независимых уравнения статики. Третье уравнение статики – сумма проекций сил на ось стержня – выполняется, так как внешние силы ортогональны оси стержня. Система является один раз статически неопределимой.

2. Удаляем лишнюю связь – «врезаем» шарнир над промежуточной опорой. Получаем статически определимую, геометрически неизменяемую

систему – основную систему метода сил. Такой выбор основной системы удобен тем, что в месте постановки промежуточного шарнира балку можно расчленить на две однопролетные балки, каждую из которых можно рассматривать независимо друг от друга. Прикладывая внешние силы и лишнюю неизвестную, получаем эквивалентную систему (рис. 8.7, б).

3. К основной системе прикладываем единичный момент $\bar{X}_1 = 1$ в направлении отброшенной связи (рис. 8.7, в) и строим единичную эпюру \bar{M}_1 (рис. 8.7, г).

4. Нагружаем основную систему заданными внешними силами (рис. 8.7, д) и строим грузовую эпюру M_F (рис. 8.7, е).

5. Записываем каноническое уравнение метода сил для случая один раз статически неопределимой системы $\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0$ и находим его коэффициент и свободный член:

$$\delta_{11} = \int_l \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI_x} dz = 2 \frac{4}{6EI_x} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{16}{6EI_x};$$

$$\Delta_{1F} = \int_l \frac{M_F \cdot \bar{M}_1}{EI_x} dz =$$

$$= \frac{4}{6EI_x} \cdot [4 \cdot 0,5 \cdot 40] + \frac{4}{6EI_x} \cdot [2 \cdot 1 \cdot (-40) + 1 \cdot (-40)] = -\frac{160}{6EI_x}.$$

Определяем значение лишней неизвестной $X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = 10$.

6. Строим эпюру $\bar{M}_1 \cdot X_1$ (рис. 8.7, ж) и $M_x = M_F + \bar{M}_1 \cdot X_1$ (рис. 8.7, з).

7. Делаем кинематическую проверку, т. е. проверяем, что в направлении отброшенной связи отсутствует перемещение:

$$\delta = \int_l \frac{M_x \cdot \bar{M}_1}{EI_x} dz = \frac{4}{6EI_x} \cdot [4 \cdot 0,5 \cdot 45 + 1 \cdot 10] + \frac{4}{6EI_x} \cdot [2 \cdot 1 \cdot (-30) + 1 \cdot (-40)] = 0.$$

Проверка выполнена. При вычислении интеграла Мора использованы формулы Симпсона и трапеций.

8. Строим эпюру поперечной силы Q_y (рис. 8.7, и). Способ построения разобран в п. 8 примера 8.1.

9. По «скачкам» на эпюре поперечной силы определяем опорные реакции:

$$R_A = 42,5 \text{ кН}; R_B = 35 \text{ кН}; R_C = 42,5 \text{ кН}.$$

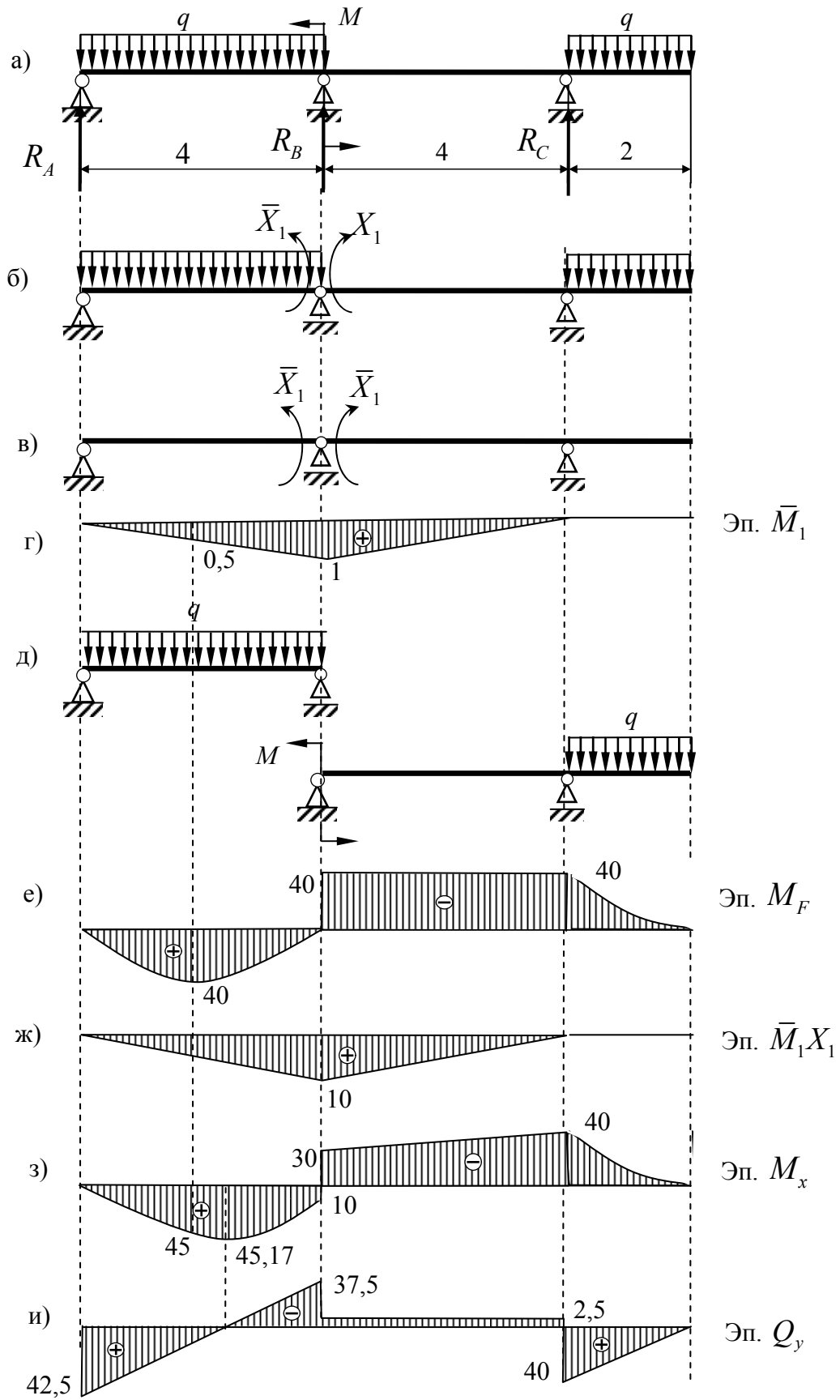


Рис. 8.7

10. Делаем статическую проверку. Для этого необходимо проверить выполнение равновесия балки (рис. 8.7, а).

Сумма проекций сил на вертикальную ось:

$$R_A + R_B + R_C - q \cdot 4 - q \cdot 2 = 42,5 + 35 + 42,5 - 80 - 40 = 0.$$

Сумма моментов относительно левой опоры:

$$R_B \cdot 4 + M - q \cdot 4 \cdot 2 + R_C \cdot 8 - q \cdot 2 \cdot (4 + 4 + 1) = 10 \cdot 2 + 90 \cdot 6 - 30 \cdot 4 \cdot 4 - 80 = 0.$$

Проверка выполнена, балка находится в равновесии.

9. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

9.1. Расчет центрально сжатых стержней. Основные понятия

Рассмотрим прямолинейный стержень, на который действует продольная сжимающая сила F (рис. 9.1). При малых значениях силы стержень испытывает осевую деформацию и устойчивой является прямолинейная форма равновесия. Если мы попытаемся отклонить стержень от прямолинейного состояния, то после снятия возмущающей нагрузки он вернется в первоначальное положение (рис. 9.1, а). При увеличении нагрузки до некоторого значения силы $F_{кр}$ наступает безразличное положение равновесия: при малом отклонении стержень не возвращается в исходное положение, а остается в новом близком криволинейном (рис. 9.1, б). Происходит бифуркация (раздвоение) равновесия. В этом случае равновесной является как прямолинейная форма равновесия, так и близкая к ней криволинейная. Наибольшее значение продольной сжимающей силы, до которого сохраняется устойчивость первоначальной формы равновесия ($F_{кр}$), называется *критической силой*. Если сила превышает $F_{кр}$, то наряду с осевой деформацией в стержне появляется изгиб. Устойчивой становится криволинейная форма равновесия (рис. 9.1, в). При незначительном превышении критической силы возникают большие прогибы и значительно увеличиваются напряжения, что недопустимо, поскольку это может привести к разрушению конструкции. Потеря устойчивости – переход от прямолинейной формы равновесия к криволинейной – может происходить при напряжениях значительно меньше тех, которые допустимы из условия прочности.

Величина критической силы зависит от гибкости стержня λ , которая вычисляется по формуле:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}, \quad (9.1)$$

где l – длина стержня; i_{\min} – минимальный радиус инерции поперечного сечения, вычисляемый как $i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}$, I_{\min} – минимальный осевой момент инерции; A – площадь поперечного сечения; μ – коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления стержня (рис. 9.2).

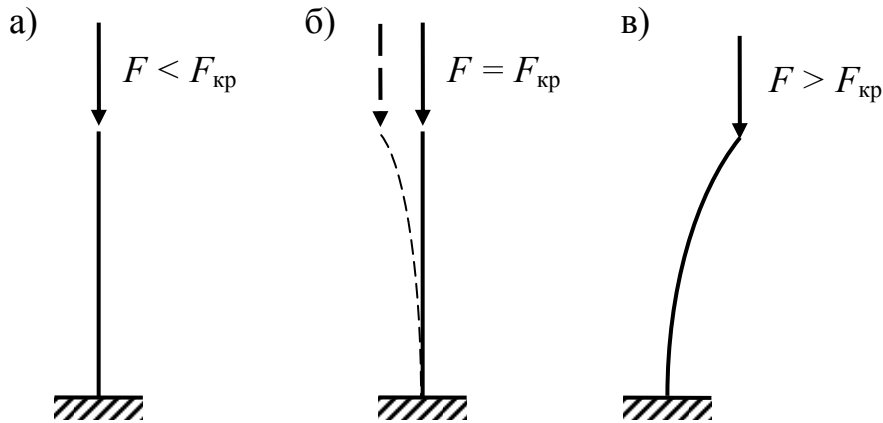


Рис. 9.1

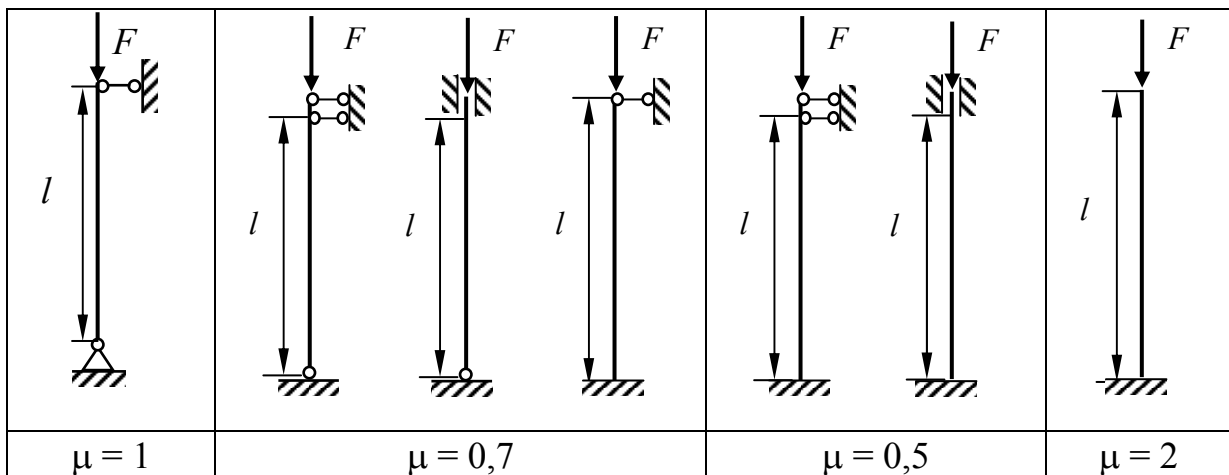


Рис. 9.2

Критическая сила в зависимости от гибкости стержня вычисляется по одной из трех формул:

$$\lambda \geq \lambda_{\text{пр}} : F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}, \sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \text{ – формула Эйлера;}$$

$$\lambda_0 < \lambda_{\text{макс}} < \lambda_{\text{пр}} : F_{\text{кр}} = A\sigma_{\text{кр}} = A(a - b\lambda + c\lambda^2) \text{ – формула Ясинского;}$$

$$\lambda < \lambda_0: F_{кр} = A\sigma_{оп}, \quad \sigma_{оп} = \begin{cases} \sigma_T & \text{для пластичных материалов;} \\ \sigma_B & \text{для хрупких материалов,} \end{cases}$$

где λ_0 – гибкость стержня, до которой стержень разрушается при сжатии без потери устойчивости; $\lambda_{пр}$ – предельная гибкость стержня – гибкость, соответствующая $\sigma_{кр} = \sigma_{пц}$; $\sigma_{пц}$ – предел пропорциональности материала; E – модуль Юнга; a, b, c – константы, зависящие от материала; σ_T – предел текучести; σ_B – временное сопротивление.

Значения коэффициентов a, b, c и гибкостей $\lambda_0, \lambda_{пр}$ для некоторых материалов приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

| Материал | λ_0 | $\lambda_{пр}$ | МПа | | |
|----------|-------------|----------------|-----|-------|-------|
| | | | a | b | c |
| Ст. 3 | 40 | 100 | 267 | 0,667 | 0 |
| Чугун | 0 | 80 | 780 | 12 | 0,056 |
| Дерево | 0 | 70 | 40 | 0,286 | 0 |

Условие устойчивости формулируется следующим образом:

$$\sigma = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma]_y; \quad [\sigma]_y = [\sigma]\varphi, \quad (9.2)$$

где φ – коэффициент понижения основного допустимого напряжения, зависящий от гибкости стержня и определяемый по таблице $\lambda - \varphi$ (прил. 3) путем линейного интерполирования.

Если $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, то по табл. прил. 3

| | |
|-------------|-------------|
| λ | φ |
| λ_1 | φ_1 |
| λ_2 | φ_2 |

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda - \lambda_1). \quad (9.3)$$

9.2. Определение грузоподъемности центрально сжатого стержня

Пример 9.1. Для стержня длиной $l = 11$ м (рис. 9.3, а) с поперечным сечением, состоящим из двутавра № 18 и двух швеллеров № 20 (рис. 9.3, б) требуется:

1. Определить величину критической силы.
2. Вычислить величину допустимой нагрузки на устойчивость.
3. Определить величину коэффициента запаса по устойчивости.

Основное допустимое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

1. Определим гибкость стержня по формуле (9.1).
 Для указанного закрепления стержня коэффициент приведения длины $\mu = 0,7$.

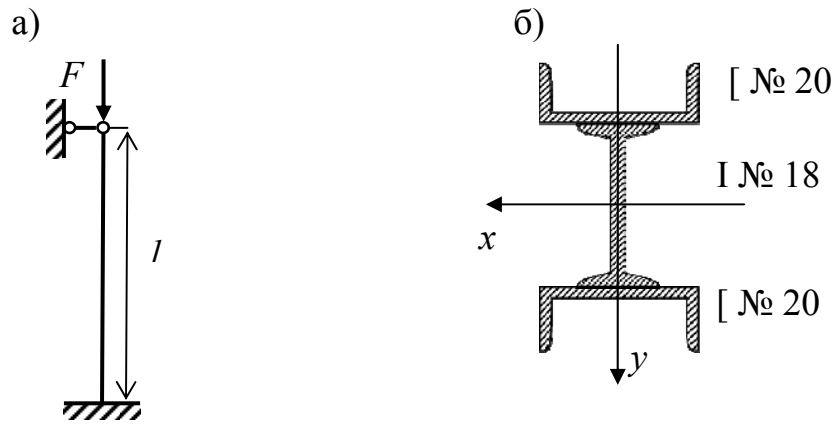


Рис. 9.3

Найдем площадь и моменты инерции сечения:

$$A = A_{\text{дв}} + 2A_{\text{шв}};$$

$$I_x = I_x^{\text{дв}} + 2 \left(I_y^{\text{шв}} + \left(\frac{h_{\text{дв}}}{2} + z_0 \right)^2 A_{\text{шв}} \right);$$

$$I_y = I_y^{\text{дв}} + 2I_x^{\text{шв}}.$$

Из сортамента для двутавра № 18: $I_x^{\text{дв}} = 1290 \text{ см}^4$; $I_y^{\text{дв}} = 82,6 \text{ см}^4$; $h_{\text{дв}} = 18 \text{ см}$; $A_{\text{дв}} = 23,4 \text{ см}^2$. Из сортамента для швеллера № 20: $I_x^{\text{шв}} = 1520 \text{ см}^4$; $I_y^{\text{шв}} = 113 \text{ см}^4$; $z_0 = 2,07 \text{ см}$; $A_{\text{шв}} = 23,4 \text{ см}^2$;

$$A = 23,4 + 2 \cdot 23,4 = 70,2 \text{ см}^2;$$

$$I_x = 1290 + 2 \left(113 + (9 + 2,07)^2 23,4 \right) = 7251,1 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 82,6 + 2 \cdot 1520 = 3122,6 \text{ см}^4.$$

Найдем минимальный радиус инерции:

$$I_{\text{min}} = I_y, \text{ следовательно, } i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{I_{\text{min}}}{A}} = \sqrt{\frac{3122,6}{70,2}} = 6,67 \text{ см,}$$

тогда гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 1100 \text{ см}}{6,67 \text{ см}} = 115,44.$$

Для стали $\lambda_0 = 40$, $\lambda_{\text{пр}} = 100$ (табл. 9.1). Тогда $\lambda > \lambda_{\text{пр}}$ и, следовательно, критическую силу нужно определять по формуле Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{(3,14)^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 \cdot 3122,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4}{(0,7 \cdot 11 \text{ м})^2} = 1038,54 \text{ кН}.$$

2. Найдем величину допустимой нагрузки на устойчивость.
Из условия устойчивости (9.2) получаем

$$\frac{F}{A} \leq [\sigma] \varphi.$$

Следовательно, $[F] = A[\sigma] \varphi$. Коэффициент φ определяем по таблице $\lambda - \varphi$ (прил. 3, ст. 3) путем линейного интерполирования по формуле (9.3):

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 110; \quad \varphi_1 = 0,52 \\ \lambda_2 = 120; \quad \varphi_2 = 0,45 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi = 0,52 - \frac{0,52 - 0,45}{10} (115,44 - 110) = 0,482.$$

Тогда допустимая сила на устойчивость

$$[F] = 70,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 160 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 \cdot 0,482 = 541,38 \text{ кН}.$$

3. Определим величину коэффициента запаса по устойчивости:

$$n = \frac{F_{\text{кр}}}{[F]} = \frac{1038,54}{541,38} = 1,92 > 1.$$

Пример 9.2. Рассмотрим чугунный стержень длиной $l = 1,6$ м прямоугольного сечения со сторонами $b = 20$ см, $h = 30$ см (рис. 9.4). Найдем критическую силу и допустимую нагрузку на устойчивость.

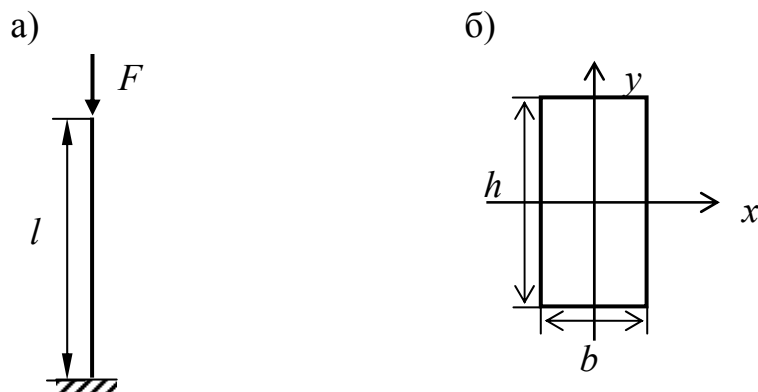


Рис. 9.4

Моменты инерции прямоугольника:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 45\,000 \text{ см}^4 \\ I_y &= \frac{b^3h}{12} = \frac{20^3 \cdot 30}{12} = 20\,000 \text{ см}^4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_{\min} = I_y = 20\,000 \text{ см}^4.$$

Тогда минимальный радиус инерции:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{20\,000}{20 \cdot 30}} = 5,77 \text{ см}.$$

Вычислим гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 160 \text{ см}}{5,77 \text{ см}} = 55,46,$$

где коэффициент приведения длины $\mu = 2$.

Для чугуна $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{\text{пр}} = 80$, следовательно, $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{\text{пр}}$. Тогда критическую силу определяем по формуле Ясинского:

$$\begin{aligned} F_{\text{кр}} &= A(a - b\lambda + c\lambda^2) = 600 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \left(780 - 12 \cdot 55,46 + 0,056(55,46)^2 \right) \text{ МН/м}^2 = \\ &= 17,2 \text{ МН}. \end{aligned}$$

Из условия устойчивости (9.2) найдем допустимую нагрузку на устойчивость:

$$F \leq [\sigma] \varphi A.$$

Коэффициент φ определяем по таблице λ – φ (прил. 3, чугун СЧ 15–30) путем линейного интерполирования по формуле (9.3):

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 50; & \varphi_1 &= 0,57 \\ \lambda_2 &= 60; & \varphi_2 &= 0,44 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = 0,57 - \frac{0,57 - 0,44}{10} (55,46 - 50) = 0,499.$$

Тогда допустимая сила на устойчивость

$$[F] = 600 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 100 \text{ МН/м}^2 \cdot 0,499 = 2,99 \text{ МН}.$$

где $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.

Коэффициент запаса на устойчивость:

$$n = \frac{F_{\text{кр}}}{[F]} = \frac{17,2}{2,99} = 5,7.$$

10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ УДАРЕ ПО СТРЕЖНЮ

Напряжения и перемещения при ударном действии нагрузки определяются по формулам

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст}; \quad v_d = k_d v_{ст},$$

где σ_d и v_d – динамические напряжения и перемещения при ударе; $\sigma_{ст}$ и $v_{ст}$ – напряжения и перемещения, вызванные статическим действием силы, приложенной в месте падения груза и равной весу падающего груза.

Динамический коэффициент при ударе без учета массы конструкции, подвергающейся удару, определяется по формуле

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{v_{ст}}},$$

где h – высота падения ударяющего груза.

Рассмотрим пример решения задачи на удар.

Условие задачи следующее. На стержень с высоты h падает груз весом G . Требуется определить максимальные динамические напряжения в стержне и вычислить динамический прогиб сечения A . В расчете принять поперечное сечение стержня в виде двух швеллеров № 22. Исходные данные приведены в табл. 10.1 и на рис. 10.1.

Таблица 10.1

| | l_1 | l_2 | l_3 | α | h | G |
|--|-------|-------|-------|----------|-----|-----|
| | м | | | | см | кН |
| | 2 | 4 | 4 | 0,5 | 3,5 | 5 |

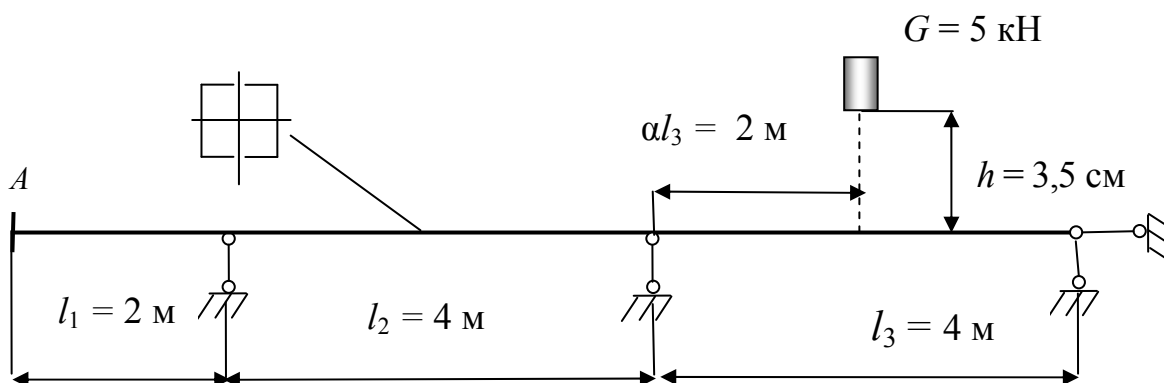


Рис. 10.1

Геометрические характеристики для швеллера № 22 (ГОСТ 8240–97):

$$I_x = 2110 \text{ см}^4; W_x = 192 \text{ см}^3.$$

Для определения статических напряжений $\sigma_{\text{ст}}$ и перемещений $\nu_{\text{ст}}$ в данной один раз статически неопределимой балке требуется построить эпюру изгибающих моментов $M_x = M_{\text{ст}}$ от действия статической силы, равной весу падающего груза.

На рис. 10.2, а показана основная система метода сил для решения данной задачи.

Ординаты эпюры изгибающих моментов M_x вычисляются по формуле

$$M_x = M_F + X_1 \bar{M}_1.$$

Величина неизвестной реакции X_1 определяется из решения канонического уравнения метода сил:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

Для вычисления единичного δ_{11} и грузового Δ_{1F} перемещений применяются формулы Верещагина и Симпсона.

На рис. 10.2. б, в показаны единичная \bar{M}_1 и грузовая M_F эпюры изгибающих моментов.

Коэффициент δ_{11} и свободный член Δ_{1F} вычислим с использованием формулы Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) \cdot 2 = \frac{128}{3EI_x};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \right) \cdot 2 = \frac{20}{EI_x};$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{20 \cdot 3}{128} = -\frac{60}{128}.$$

На рис. 10.2, г, д показаны «исправленная» единичная $X_1 \bar{M}_1$ и окончательная M_x эпюры изгибающих моментов.

Максимальные статические напряжения в балке:

$$|\sigma|_{\text{ст, max}} = \frac{|M_{x, \text{max}}|}{W_x} = \frac{4,0625 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 192 \cdot 10^{-6}} = 10,58 \text{ МПа}.$$

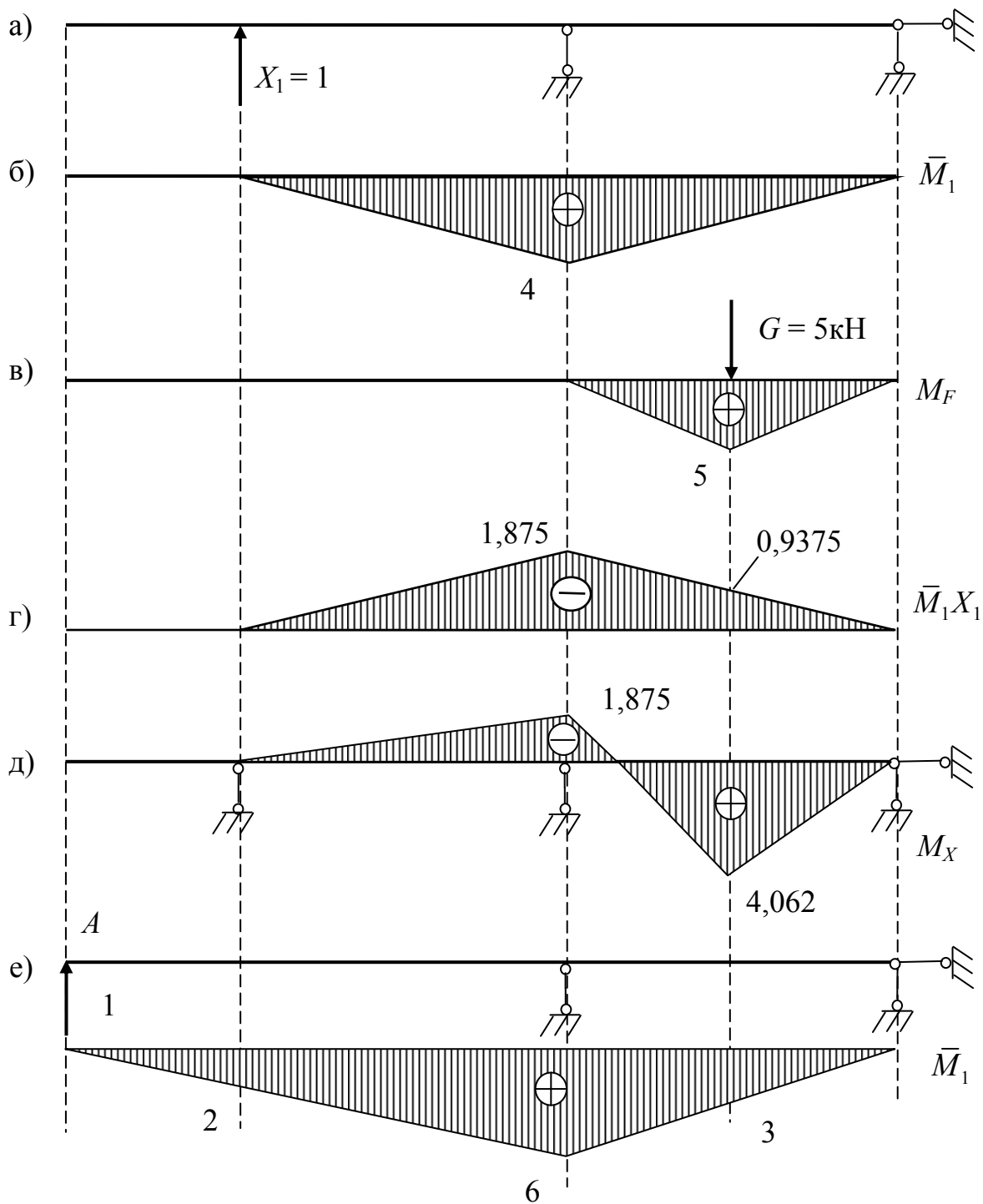


Рис. 10.2

Для вычисления статического прогиба заданного сечения A необходимо построить вторую единичную эпюру изгибающего момента от действия единичной силы, приложенной в сечении A (рис. 10.2, e). Статический прогиб сечения A вычисляется по формуле

$$v_{\text{ст.}A} = \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}_1}{EI} dz .$$

Для вычисления интеграла Мора используем прием Верещагина:

$$\begin{aligned} v_{\text{ст.}A} &= \frac{1}{E2I_x} \left[\frac{4}{6} (0 \cdot 2 - 1,875 \cdot 6 - 4 \cdot 0,9375 \cdot 4) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{6} (-1,875 \cdot 6 + 4,0625 \cdot 3 + 4 \cdot 4,5 \cdot 1,1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{6} (4,0625 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 2,032 \cdot 1,5) \right] = \frac{-2,68}{E2I_x} = \frac{-2,68 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 2110 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -3 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \end{aligned}$$

Динамический коэффициент:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{V_{\text{ст}}}}$$

Перемещение $v_{\text{ст}}$ можно вычислить по формуле

$$v_{\text{ст}} = \int_0^l \frac{M_X \cdot \bar{M}_3}{EI} dz .$$

Единичная эпюра \bar{M}_3 изгибающего момента строится в основной системе метода сил от действия единичной силы, приложенной в месте падения груза. Из рис. 10.2, в следует, что единичная эпюра \bar{M}_3 по виду совпадает с эпюрой M_F . Различие заключается в том, что ординаты эпюры \bar{M}_3 в G раз меньше, чем ординаты эпюры M_F (в данном примере в 5 раз). С целью упрощения расчета можно не строить единичную эпюру \bar{M}_3 , а вычисление величины $v_{\text{ст}}$ может быть выполнено по формуле

$$v_{\text{ст}} = \int_0^l \frac{M_X \cdot M_F}{5EI} dz .$$

Вычисление интеграла Мора выполняется по формуле Симпсона:

$$\begin{aligned} v_{\text{ст}} &= \frac{1}{5 \cdot EI_x} \left[\frac{2}{6} (4 \cdot 2,5 \cdot 1,1 + 4,06 \cdot 5) + \frac{2}{6} (4 \cdot 2,5 \cdot 2,03 + 4,06 \cdot 5) \right]; \\ v_{\text{ст}} &= \frac{27,17}{5 \cdot EI_x} = \frac{5,43 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 2110 \cdot 10^{-8}} = 6,43 \cdot 10^{-4} \text{ м;} \end{aligned}$$

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{v_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,035}{6,43 \cdot 10^{-4}}} = 11,4.$$

Максимальные динамические напряжения:

$$\sigma_{д,маx} = 10,58 \cdot 11,4 = 126 \text{ МПа.}$$

Динамический прогиб заданного сечения A :

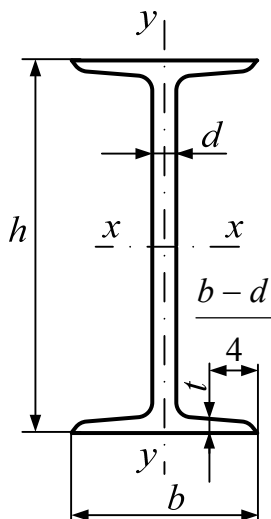
$$v_{дин} = v_{ст,A} \cdot K_d = -3 \cdot 10^{-3} \cdot 11,4 = -34,2 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Библиографический список

1. Александров А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Попов, Б. П. Державин. – 3-е изд., испр. – Москва : Высшая школа, 2003. – 560 с. : ил.
2. Елизаров С. В. Сопротивление материалов : базовый курс лекций / С. В. Елизаров, Ю. П. Каптелин. – Санкт-Петербург : Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2007. – 254 с.
3. Сопротивление материалов. Основы теории. Примеры. Задачи : учеб. пособие / С. В. Елизаров, Ю. П. Каптелин, Я. К. Кульгавий, Н. М. Савкин ; под общ. ред. С. В. Елизарова. – Санкт-Петербург : Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2006. – 400 с.

Приложение 1

СТАЛЬ ГОРЯЧЕКАТАНАЯ. БАЛКИ ДВУТАВРОВЫЕ (по ГОСТ 8239–89)



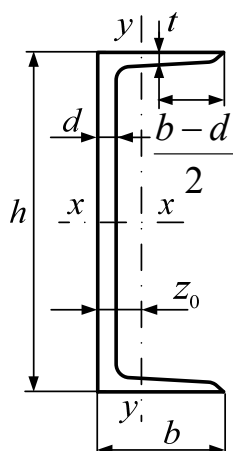
h – высота балки;
 b – ширина балки;
 d – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 F – площадь сечения;
 I – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 i – радиус инерции;
 S – статический момент полусечения

Таблица П.1

| Но- мер про- филя | Мас- са, кг/м | Размеры, мм | | | | F , см ² | I_x , см ⁴ | W_x , см ³ | i_x , см | S_x , см ³ | I_y , см ⁴ | W_y , см ³ | i_y , см |
|----------------------------|---------------------|-------------|-----|-----|------|--------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------|
| | | h | b | d | t | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 10 | 9,46 | 100 | 55 | 4,5 | 7,2 | 12,0 | 198 | 39,7 | 4,06 | 23,0 | 17,9 | 6,49 | 1,22 |
| 12 | 11,5 | 120 | 64 | 4,8 | 7,3 | 14,7 | 350 | 58,4 | 4,88 | 33,7 | 27,9 | 8,72 | 1,38 |
| 14 | 13,7 | 140 | 73 | 4,9 | 7,5 | 17,4 | 572 | 81,7 | 5,73 | 46,8 | 41,9 | 11,5 | 1,55 |
| 16 | 15,9 | 160 | 81 | 5,0 | 7,8 | 20,2 | 873 | 109 | 6,57 | 62,3 | 58,6 | 14,5 | 1,70 |
| 18 | 18,4 | 180 | 90 | 5,1 | 8,1 | 23,4 | 1290 | 143 | 7,42 | 81,4 | 82,6 | 18,4 | 1,88 |
| 20 | 21 | 200 | 100 | 5,2 | 8,4 | 26,8 | 1840 | 184 | 8,28 | 104 | 115 | 23,1 | 2,07 |
| 22 | 24 | 220 | 110 | 5,4 | 8,7 | 30,6 | 2550 | 232 | 9,13 | 131 | 157 | 28,6 | 2,27 |
| 24 | 27,3 | 240 | 115 | 5,6 | 9,5 | 34,8 | 3460 | 289 | 9,97 | 163 | 198 | 34,5 | 2,37 |
| 27 | 31,5 | 270 | 125 | 6,0 | 9,8 | 40,2 | 5010 | 371 | 11,2 | 210 | 260 | 41,5 | 2,54 |
| 30 | 36,5 | 300 | 135 | 6,5 | 10,2 | 46,5 | 7080 | 472 | 12,3 | 268 | 337 | 49,9 | 2,69 |
| 33 | 42,2 | 330 | 140 | 7,0 | 11,2 | 53,8 | 9840 | 597 | 13,5 | 339 | 419 | 59,9 | 2,79 |
| 36 | 48,6 | 360 | 145 | 7,5 | 12,3 | 61,9 | 13380 | 743 | 14,7 | 423 | 516 | 71,1 | 2,89 |
| 40 | 57 | 400 | 155 | 8,3 | 13,0 | 72,6 | 19062 | 953 | 16,2 | 545 | 667 | 86,1 | 3,03 |
| 45 | 66,5 | 450 | 160 | 9,0 | 14,2 | 84,7 | 27696 | 1231 | 18,1 | 708 | 808 | 101 | 3,09 |
| 50 | 78,5 | 500 | 170 | 10 | 15,2 | 100 | 39727 | 1589 | 19,9 | 919 | 1043 | 123 | 3,23 |
| 55 | 92,6 | 550 | 180 | 11 | 16,5 | 118 | 55962 | 2035 | 21,8 | 1181 | 1356 | 151 | 3,39 |
| 60 | 108 | 600 | 190 | 12 | 17,8 | 138 | 76806 | 2560 | 23,6 | 1491 | 1725 | 182 | 3,54 |

Приложение 2

СТАЛЬ ГОРЯЧЕКАТАНАЯ. ШВЕЛЛЕРЫ (по ГОСТ 8240–89)



- h – высота швеллера;
 b – ширина швеллера;
 d – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 I – момент инерции;
 F – площадь швеллера;
 W – момент сопротивления;
 i – радиус инерции;
 S – статический момент полусечения;
 z_0 – расстояние от оси y до наружной грани стенки

Таблица П.2

| Номер профиля | Масса, кг/м | Размеры, мм | | | | F , см ² | I_x , см ⁴ | W_x , см ³ | i_x , см | S_x , см ³ | I_y , см ⁴ | W_y , см ³ | i_y , см | z_0 , см |
|---------------|-------------|-------------|-----|-----|------|-----------------------|-------------------------|-------------------------|------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------|------------|
| | | h | b | d | t | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 5 | 4,84 | 50 | 32 | 4,4 | 7,0 | 6,16 | 22,8 | 9,1 | 1,92 | 5,59 | 5,61 | 2,75 | 0,954 | 1,16 |
| 6,5 | 5,9 | 65 | 36 | 4,4 | 7,2 | 7,51 | 48,6 | 15,0 | 2,54 | 9,00 | 8,70 | 3,68 | 1,08 | 1,24 |
| 8 | 7,05 | 80 | 40 | 4,5 | 7,4 | 8,98 | 89,4 | 22,4 | 3,16 | 13,3 | 12,8 | 4,75 | 1,19 | 1,31 |
| 10 | 8,59 | 100 | 46 | 4,5 | 7,6 | 10,9 | 174 | 34,8 | 3,99 | 20,4 | 20,4 | 6,46 | 1,37 | 1,44 |
| 12 | 10,4 | 120 | 52 | 4,8 | 7,8 | 13,3 | 304 | 50,6 | 4,78 | 29,6 | 31,2 | 8,52 | 1,53 | 1,54 |
| 14 | 12,3 | 140 | 58 | 4,9 | 8,1 | 15,6 | 491 | 70,2 | 5,60 | 40,8 | 45,4 | 11,0 | 1,70 | 1,68 |
| 16 | 14,2 | 160 | 64 | 5 | 8,4 | 18,1 | 747 | 93,4 | 6,12 | 54,1 | 63,6 | 13,8 | 1,87 | 1,80 |
| 16a | 15,3 | 160 | 68 | 5 | 9 | 19,5 | 823 | 103 | 6,49 | 59,4 | 78,8 | 16,4 | 2,01 | 2,00 |
| 18 | 16,3 | 180 | 70 | 6,1 | 8,7 | 20,7 | 1090 | 121 | 7,24 | 69,8 | 86 | 17 | 2,04 | 1,94 |
| 18a | 17,4 | 180 | 74 | 5,1 | 9,3 | 22,2 | 1190 | 132 | 7,32 | 76,1 | 105 | 20 | 2,18 | 2,13 |
| 20 | 18,4 | 200 | 80 | 5,2 | 9,0 | 23,4 | 1520 | 152 | 8,07 | 87,8 | 113 | 20,5 | 2,20 | 2,07 |
| 22 | 21 | 220 | 82 | 5,4 | 8,5 | 26,7 | 2110 | 192 | 8,89 | 110 | 151 | 25,1 | 2,37 | 2,21 |
| 24 | 24 | 240 | 90 | 5,6 | 10,0 | 30,6 | 2900 | 242 | 9,73 | 139 | 208 | 31,6 | 2,60 | 2,42 |
| 27 | 27,7 | 270 | 95 | 6,0 | 10,5 | 35,2 | 4160 | 308 | 10,9 | 178 | 262 | 37,3 | 2,73 | 2,47 |
| 30 | 31,8 | 300 | 100 | 6,5 | 11,0 | 40,5 | 5810 | 387 | 12,0 | 224 | 327 | 43,6 | 2,84 | 2,52 |
| 33 | 36,5 | 330 | 105 | 7,0 | 11,7 | 46,5 | 7980 | 484 | 13,1 | 281 | 410 | 51,8 | 2,97 | 2,59 |
| 36 | 41,9 | 360 | 110 | 7,5 | 12,6 | 53,4 | 10820 | 601 | 14,2 | 350 | 513 | 61,7 | 3,10 | 2,68 |
| 40 | 48,3 | 400 | 115 | 8,0 | 13,5 | 61,5 | 15220 | 761 | 15,7 | 444 | 642 | 73,4 | 3,23 | 2,75 |

Приложение 3

ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА φ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ГИБКОСТИ λ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Таблица П.3

| Гибкость λ | Коэффициент φ | | | | | | | |
|-----------------------|------------------------------|---------------|------|--|----------------------|-------------------------------------|--------------|-------------|
| | Сталь | | | Чугун | | Дерево (независимо от породы) | Бетон | |
| | Ст.0 Ст.2 Ст.3 Ст.4 | Ст. 5 НЛ-1 | НЛ-2 | СЧ 15-30 СЧ 15-18 СЧ 15-36 СЧ 41-40 | СЧ 21-44 СЧ 28-48 | | тяже- лый | лег- кий |
| 0 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 |
| 10 | 0,99 | 0,98 | 0,98 | 0,97 | 0,95 | 0,99 | 1,00 | 1,00 |
| 20 | 0,97 | 0,95 | 0,95 | 0,91 | 0,87 | 0,97 | 0,96 | 0,96 |
| 30 | 0,95 | 0,93 | 0,93 | 0,81 | 0,75 | 0,92 | 0,90 | 0,86 |
| 40 | 0,92 | 0,90 | 0,90 | 0,69 | 0,60 | 0,87 | 0,84 | 0,73 |
| 50 | 0,89 | 0,84 | 0,83 | 0,57 | 0,43 | 0,80 | 0,76 | 0,68 |
| 60 | 0,86 | 0,80 | 0,78 | 0,44 | 0,32 | 0,71 | 0,70 | 0,59 |
| 70 | 0,81 | 0,74 | 0,71 | 0,34 | 0,23 | 0,61 | 0,63 | 0,52 |
| 80 | 0,75 | 0,66 | 0,63 | 0,26 | 0,18 | 0,49 | 0,57 | 0,46 |
| 90 | 0,69 | 0,59 | 0,54 | 0,20 | 0,14 | 0,38 | 0,51 | – |
| 100 | 0,60 | 0,50 | 0,45 | 0,16 | 0,12 | 0,31 | 0,45 | – |
| 110 | 0,52 | 0,43 | 0,39 | – | – | 0,26 | – | – |
| 120 | 0,45 | 0,38 | 0,33 | – | – | 0,22 | – | – |
| 130 | 0,40 | 0,32 | 0,29 | – | – | 0,18 | – | – |
| 140 | 0,36 | 0,28 | 0,26 | – | – | 0,15 | – | – |
| 150 | 0,32 | 0,27 | 0,23 | – | – | 0,14 | – | – |
| 160 | 0,29 | 0,24 | 0,21 | – | – | 0,12 | – | – |
| 170 | 0,26 | 0,21 | 0,19 | – | – | 0,11 | – | – |
| 180 | 0,23 | 0,19 | 0,17 | – | – | 0,10 | – | – |
| 190 | 0,21 | 0,17 | 0,15 | – | – | – | – | – |
| 200 | 0,19 | 0,16 | 0,14 | – | – | – | – | – |

Оглавление

| | |
|--|----|
| 5. КОСОЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ | 3 |
| 5.1. Расчет на прочность балок при косом изгибе. Основные понятия ... | 3 |
| 5.2. Подбор сечения балки при косом изгибе | 5 |
| 6. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ СТЕРЖНЯ БОЛЬШОЙ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ | 8 |
| 6.1. Расчет на прочность внецентренно нагруженных стержней. Основные понятия | 8 |
| 6.2. Определение грузоподъемности внецентренно сжатого стержня | 9 |
| 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ПЛОСКОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЯ | 16 |
| 7.1. Метод Мора | 16 |
| 7.2. Применение формул трапеций и Симпсона для определения перемещений | 18 |
| 7.3. Применение приема Верещагина для определения упругих перемещений при изгибе стержней | 20 |
| 8. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ ПО ДОПУСТИМЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ | 26 |
| 9. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ | 36 |
| 9.1. Расчет центрально сжатых стержней. Основные понятия | 36 |
| 9.2. Определение грузоподъемности центрально сжатого стержня | 38 |
| 10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ УДАРЕ ПО СТРЕЖНЮ | 42 |
| Библиографический список | 46 |
| <i>Приложение 1</i> | 47 |
| <i>Приложение 2</i> | 48 |
| <i>Приложение 3</i> | 49 |

Учебное издание

Кухарева Анна Сергеевна,
Невзоров Николай Иванович,
Трощенко Эдуард Дмитриевич

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Примеры решения задач

Часть 3

Учебное пособие

Редактор и корректор *И. А. Шабранская*
Компьютерная верстка *М. С. Савастеевой*

План 2013 г., № 21

Подписано в печать с оригинал-макета 10.09.2014.
Формат 60×84¹/₁₆. Бумага для множ. апп. Печать ризография.
Усл. печ. л. 3,2. Тираж 500 экз.

Заказ 831.

ФГБОУ ВПО ПГУПС. 190031, СПб., Московский пр., 9.
Типография ФГБОУ ВПО ПГУПС. 190031, СПб., Московский пр., 9.