

Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

А. С. Кухарева, Н. И. Невзоров, Э. Д. Трощенко

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Примеры решения задач

Часть 2

Учебное пособие

Санкт-Петербург
ПГУПС
2013

УДК 539.3/8
ББК Ж121
К88

Р е ц е н з е н т ы:
заведующий кафедрой «Сопротивление материалов
и теория упругости» Санкт-Петербургского института
машиностроения (ЛМЗ-ВТУЗ),
доктор технических наук, профессор *Е. В. Соколов*;
доцент кафедры «Прочность материалов и конструкций» ПГУПС,
кандидат технических наук *С. А. Видюшенков*

Кухарева А. С.
К88 Сопротивление материалов. Решение задач. Ч.2.: учеб. пособие / А. С. Кухарева, Н. И. Невзоров, Э. Д. Троценков. – СПб. : Петербургский государственный университет путей сообщения, 2013. – с.

ISBN 978-5-7641-0540-6

Вторая часть учебного пособия содержит примеры выполнения контрольных работ по первой части курса сопротивление материалов (осевая деформация, кручение, изгиб, геометрические характеристики поперечных сечений стержней).

Предназначено для студентов заочной формы обучения.

УДК 539.3/8
ББК Ж121

ISBN 978-5-7641-0540-6 (часть 2)
ISBN 978-5-7641-0267-2

© Кухарева А. С., Невзоров Н. И,
Троценков Э.Д., 2013
©Петербургский государственный
университет путей сообщения, 2013

1. ОСЕВАЯ ДЕФОРМАЦИЯ*

Осевая деформация возникает при приложении к стержню нагрузок, действующих вдоль продольной оси. В частности, осевая деформация возникает в элементах шарнирно-стержневых систем. При осевой деформации из шести внутренних усилий отлична от нуля только продольная сила в стержне.

1.1. Определение реакций опор.

1.1.1. Ступенчато - призматические стержни.

На рис.1.1. а, в показаны схемы ступенчато - призматических стержней, нагруженных осевыми силами.

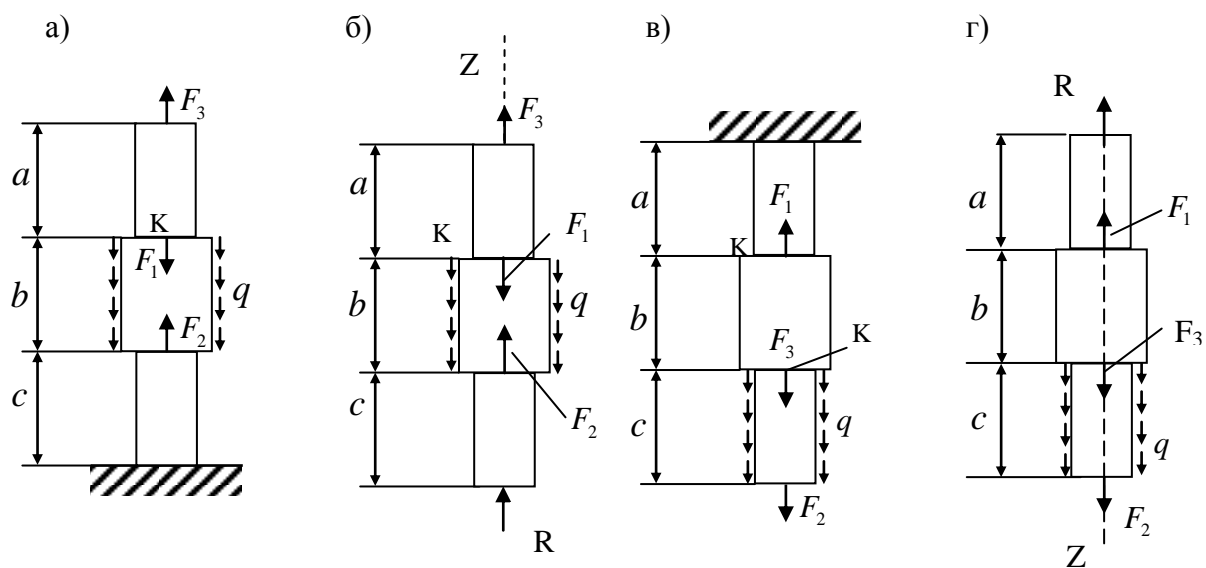


Рис.1.1

Реакция R , возникающая в опоре стержня, определяется из уравнения статики: сумма проекций всех сил на ось z стержня равна нулю.

Рис.1.1 б):

* Указания к решению задач 1, 2, 3 ч. 1 учебного пособия

$$\sum Z=0 \quad R+F_2-F_1+F_3-qb=0 \quad (1.1)$$

Рис.1.1 г:

$$\sum Z=0 \quad -R-F_1+F_3+F_2+qc=0 \quad (1.2)$$

1.1.2. Статически определимые шарнирно - стержневые системы.

На рис.1.2 а, б показаны схемы статически определимых шарнирно-стержневых систем.

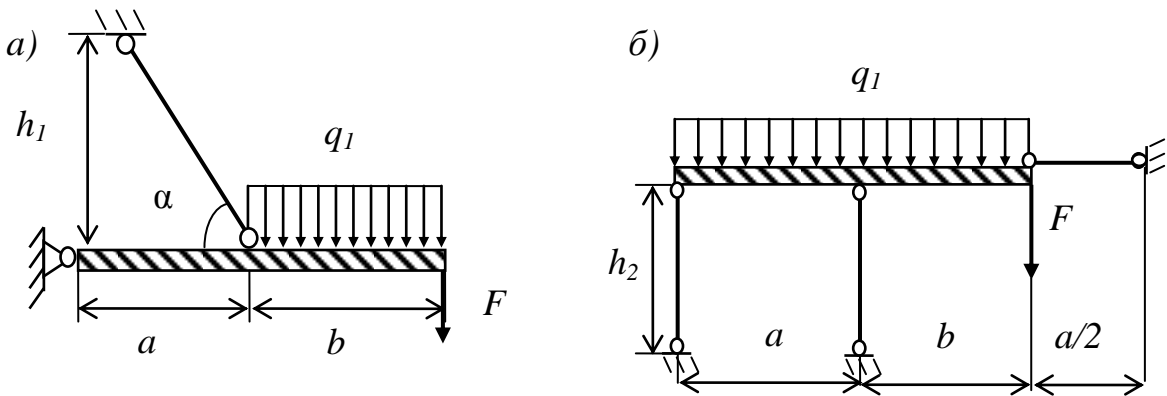


Рис.1.2

Реакции опор в стержнях, имеющих двустороннее шарнирное при-крепление, направлены вдоль оси стержня (рис.1.3. а, б).

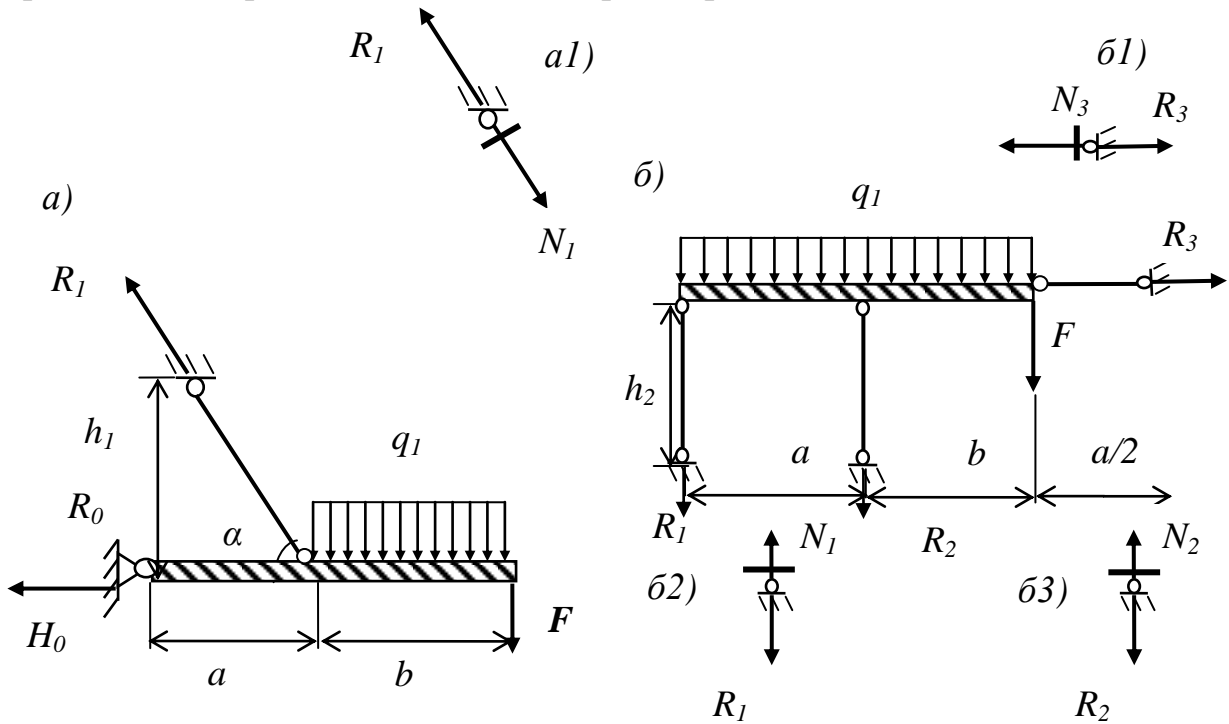


Рис.1.3

Из уравнений равновесия, записанных для опорных узлов (рис. 1.3, а1 и рис.1.3 б1, б2, б3), следует, что продольная сила в таких стержнях постоянна и равна реакции опоры:

$$N_1 = R_1, \quad N_2 = R_2, \quad N_3 = R_3 \quad (1.3)$$

Для определения реакций опор и усилий в элементах шарнирно-стержневых систем рассматривается равновесие абсолютно жесткого диска (элемент со штриховкой) (рис.1.4, а, б).

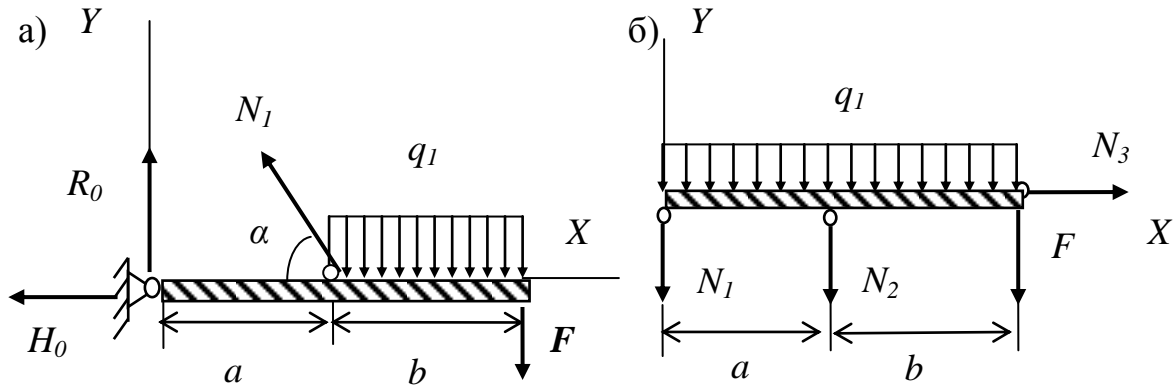


Рис.1.4

Рис.1.4 а:

$$\sum M_0 = 0, \quad N_1 \cdot \sin \alpha \cdot a - q_1 b \left(a + \frac{b}{2} \right) - F \cdot (a+b) = 0; \quad (1.4)$$

$$\sum Y = 0, \quad R_0 + N_1 \sin \alpha - q_1 b - F = 0; \quad (1.5)$$

$$\sum X = 0, \quad -H_0 - N_1 \cos \alpha = 0. \quad (1.6)$$

Рис.1.4 б:

$$\sum M_0 = 0, \quad -N_2 \cdot a - q_1 \cdot (a+b) \cdot \frac{(a+b)}{2} - F \cdot (a+b) = 0; \quad (1.7)$$

$$\sum Y = 0, \quad -N_1 - N_2 - F - q_1 \cdot (a+b) = 0; \quad (1.8)$$

$$\sum X = 0, \quad N_3 = 0. \quad (1.9)$$

1.1.3. Статически неопределимые шарнирно-стержневые системы.

На рис.1.5 а), б) показаны схемы статически неопределимых шарнирно - стержневых систем. Уравнения равновесия составляются для схем, приведенных на рис.1.5 в, г.

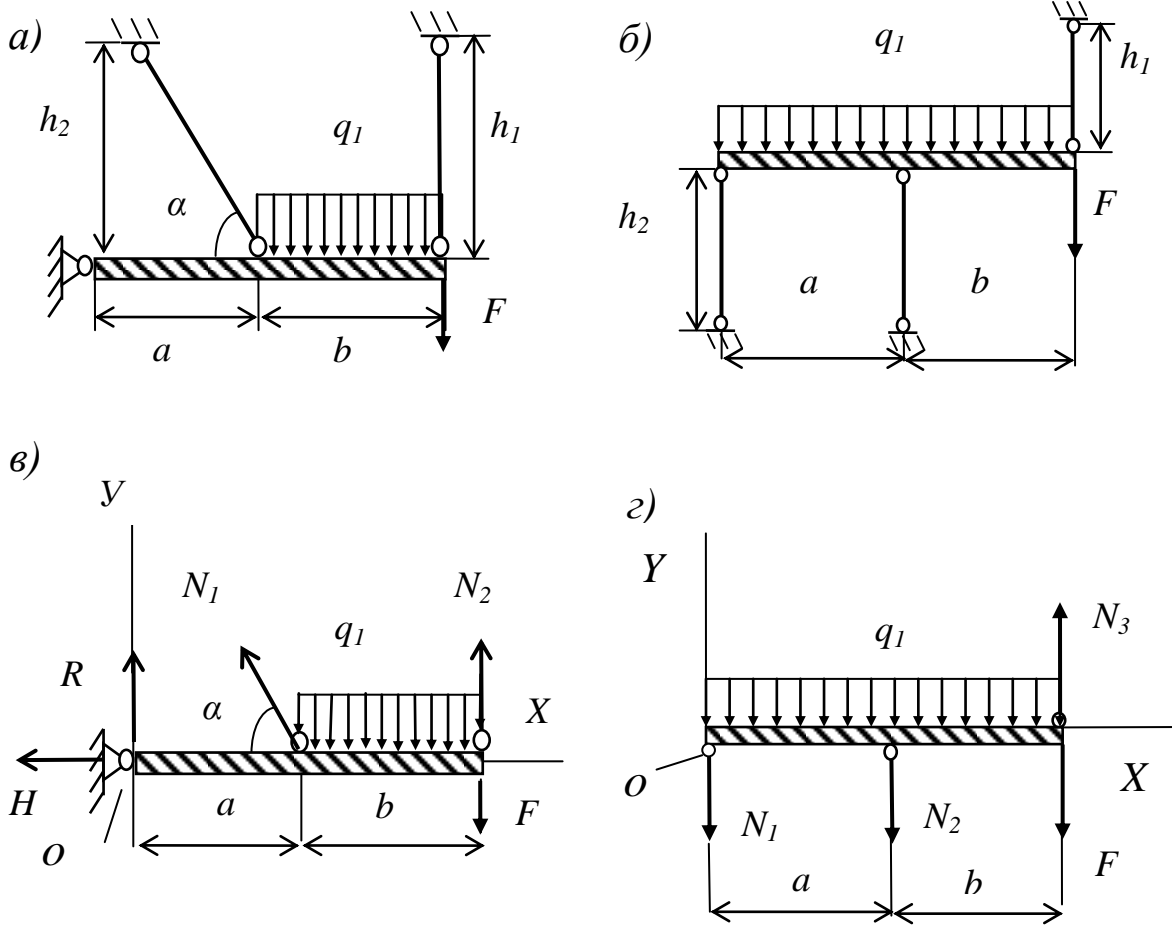


Рис.1.5

Рис.1.5, в:

$$\sum M_o = 0, \quad N_1 \cdot \sin \alpha a - q_1 \cdot b \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) - F \cdot (a+b) + N_2 \cdot (a+b) = 0; \quad (1.10)$$

$$\sum Y = 0, \quad R + N_1 \cdot \sin \alpha - q_1 \cdot b - F + N_2 = 0; \quad (1.11)$$

$$\sum X = 0, \quad -H - N_1 \cdot \cos \alpha = 0 \quad (1.12)$$

Рис.1.5 г)

$$\sum M_o = 0, \quad N_3 \cdot (a+b) - N_2 \cdot a - q_1 \cdot (a+b) \cdot \frac{(a+b)}{2} - F \cdot (a+b) = 0; \quad (1.13)$$

$$\sum Y=0, \quad -N_1 - N_2 - F - q_1 \cdot (a+b) + N_3 = 0; \quad (1.14)$$

$$\sum X=0 \quad 0=0. \quad (1.15)$$

Особенность расчета статически неопределимых систем заключается в том, что составленных уравнений равновесия недостаточно для определения реакций опор и усилий в элементах системы. Для решения таких систем дополнительно составляются уравнения совместности перемещений. Для получения уравнений совместности перемещений надо рассмотреть картину перемещений, возникающих в системе под нагрузкой (рис.1.6, а, б).

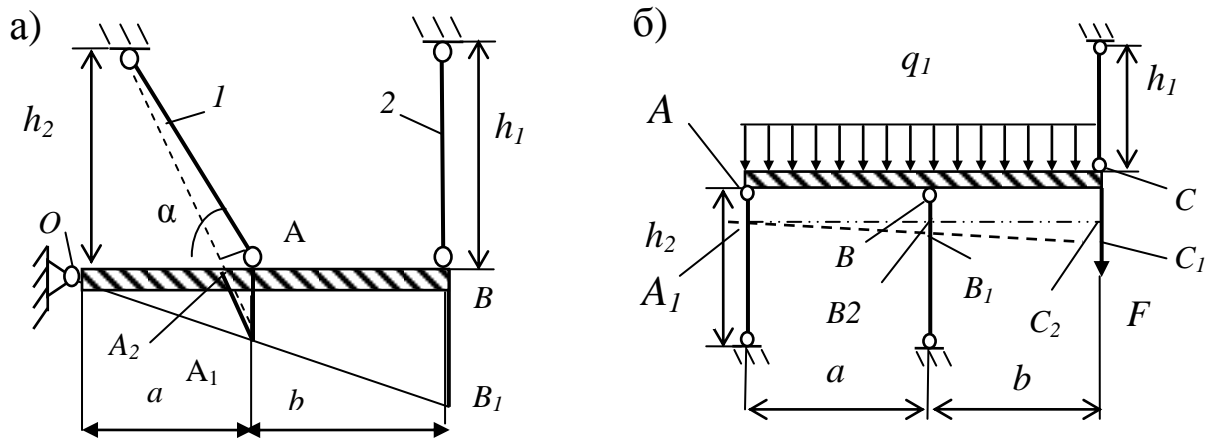


Рис.1.6.

По картине перемещений определяются абсолютные деформации Δl элементов системы: $A_1 A_2 = \Delta l_1$, $B B_1 = \Delta l_2$ (рис.1.6 а) $A_1 A = \Delta l_1$, $B B_1 = \Delta l_2$, $C C_1 = \Delta l_3$ (рис.1.6,б).

Из подобия треугольников OAA_1 и OBV_1 (рис.1.6 а) следует

$$\frac{\Delta l_1}{\sin \alpha} \frac{1}{a} = \frac{\Delta l_2}{a+b} \quad (1.16)$$

Из подобия треугольников $A_1 B_2 B_1$ и $A_1 C_2 C_1$ (рис.1.6 б) следует

$$\frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{a+b} \quad (1.17)$$

Абсолютная деформация Δl связана с продольной силой N формулой, выражающей закон Гука для осевой деформации

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (1.18)$$

Формулы (1.16) и (1.17) с учетом формулы (1.18) могут быть переписаны в виде

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1 \sin \alpha} \frac{1}{a} = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2 (a+b)} \quad (1.16_1)$$

$$(a+b) \left(\frac{-N_2 l_2}{E_2 A_2} - \frac{-N_1 l_1}{E_1 A_1} \right) = a \left(\frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} - \frac{-N_1 l_1}{E_1 A_1} \right) \quad (1.17_1)$$

Замечание. Поскольку стержни 1 и 2 на картине перемещений (рис. 1.6 б) показаны сжатыми, то в уравнении (1.17₁) усилия N_1 и N_2 записаны со знаком минус. Дополняя систему уравнений (1.10) – (1.12) уравнением (1.16₁), получим систему уравнений достаточную для определения реакций опор и усилий в элементах системы, приведенной на рис.1.5 а.

Аналогично, дополняя систему уравнений (1.13) – (1.15) уравнением (1.17₁), получим систему уравнений достаточную для определения реакций опор и усилий в элементах системы, приведенной на рис.1.5 б.

1.2. Построение эпюры продольной силы в ступенчато - призматическом стержне

На рис.1.7 а показана схема ступенчато-призматического стержня, нагруженного осевыми силами.

Для построения эпюры продольной силы используется метод сечений. Участки стержня нумеруются (порядок нумерации произвольный). В пределах каждого участка проводится сечение и показывается отсеченная часть (рис.1.7 б, в, г).

Правило знаков для продольной силы: положительный вектор продольной силы направляется наружу из отсеченной части (т.е. вызывает растяжение отсеченной части).

Для каждой отсеченной части записывается уравнение равновесия

$$\Sigma Z_1 = 0. \quad -F_3 + N_{z1} = 0, \quad N_{z1} = F_3.$$

$$\Sigma Z_2 = 0. \quad -F_3 + F_1 + q * z_2 + N_{z2} = 0, \\ N_{z2} = F_3 - F_1 - q_1 * z_2, \quad 0 \leq z_2 \leq b$$

$$\Sigma Z_3 = 0. \quad -N_{z3} + R. = 0, \quad N_{z3} = R.$$

По полученным выражениям строится эпюра продольной силы. На рис.1.8 а) показана эпюра продольной силы, построенная для следующих числовых данных: $a = 0,9$ м, $b = 0,8$ м, $c = 0,7$ м, $F_1 = 40$ кН, $F_2 = 100$ кН, $F_3 = 60$ кН, $q_1 = 80$ кН/м.

На рис.1.8 б показана эпюра продольной силы, построенная для ступенчато-призматического стержня, приведенного на рис.1.1 в (числовые данные взяты из предыдущей задачи).

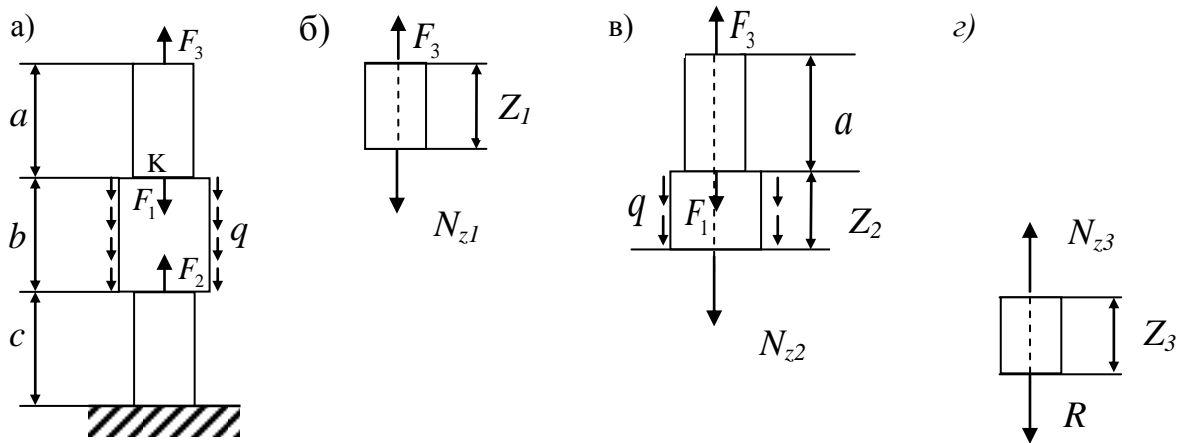


Рис.1.7

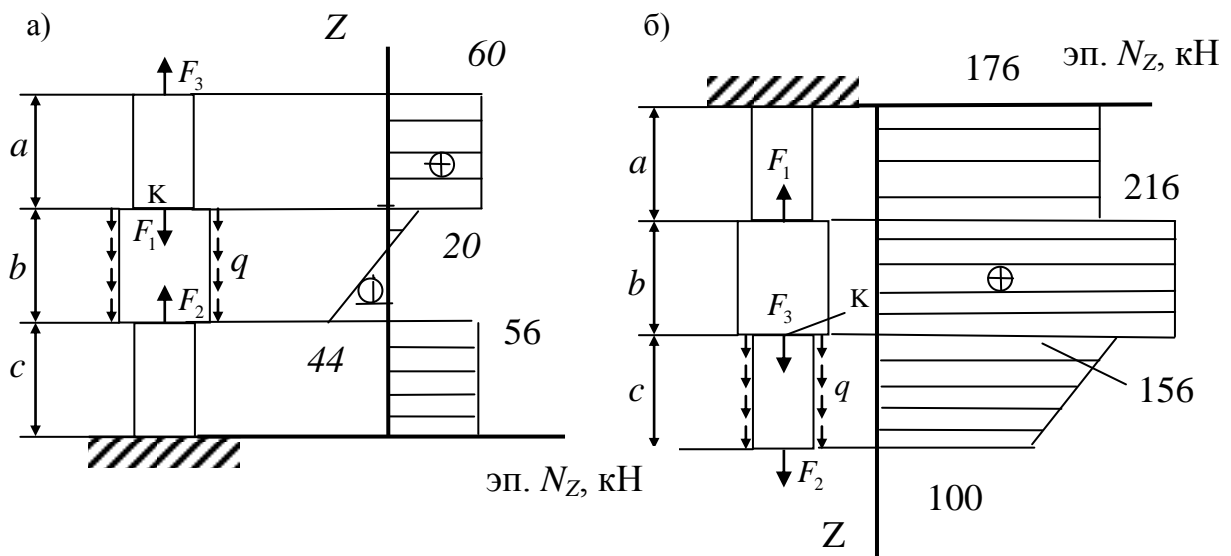


Рис.1.8

1.3. Подбор поперечных сечений. Определение перемещений.

1.3.1. Ступенчато - призматические стержни.

Из условия прочности при осевой деформации можно получить формулу подбора поперечных сечений

$$A_i \geq \frac{|N_i| \max}{[\sigma]} \quad (1.19)$$

где A_i - площадь поперечного сечения участка i стержня,

$|N_i|_{max}$ - максимальное значение продольной силы на участке i ,

$[\sigma]$ - допускаемое значение нормального напряжения материала стержня.

Формула вычисления перемещений

$$\Delta k = \sum \frac{\omega_{N_i}}{E A_i}, \quad (1.20)$$

где ω_{N_i} - площадь (с учетом знака) эпюры продольной силы на участке i ,

$E A_i$ - продольная жесткость участка i стержня.

Суммирование в формуле (1.20) распространяется на часть стержня, расположенную между заделкой и заданным сечением « k ».

Рассмотрим конкретный пример. На рис.1.1 а показан ступенчато-призматический стержень, нагруженный осевыми силами. Примем в расчете $[\sigma] = 12$ МПа, $E = 10^4$ МПа (дерево).

Для подбора площадей поперечных сечений участков ступенчатого стержня и определения перемещения заданного сечения используется эпюра продольной силы (рис.1.8 а).

$$A_1 \geq \frac{60 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^6} = 5 \cdot 10^{-3} (\text{м}^2) \cdot 10^4 = 50 \text{ см}^2.$$

$$A_2 \geq \frac{44 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^6} = 3,67 \cdot 10^{-3} (\text{м}^2) \cdot 10^4 = 36,7 \text{ см}^2$$

$$A_3 \geq \frac{56 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^6} = 4,67 \cdot 10^{-3} (\text{м}^2) \cdot 10^4 = 46,7 \text{ см}^2$$

Перемещение сечения « k »

$$\Delta k = \frac{\omega_{N_2}}{E A_2} + \frac{\omega_{N_3}}{E A_3} = \frac{1}{E} \left[\frac{-44 + 20}{3,67 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,8 + \frac{56 \cdot 0,7}{4,67 \cdot 10^{-3}} \right] =$$

$$= \frac{1}{10^4 \cdot 10^3} \left[\frac{-44 + 20}{3,67 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,8 + \frac{56 \cdot 0,7}{4,67 \cdot 10^{-3}} \right] = 5,778 \cdot 10^{-4} (\text{м})$$

1.3.2. Шарнирно - стержневые системы*

Формула для подбора поперечных сечений

$$A_i \geq \frac{|N_i|}{[\sigma]} \quad (1.21)$$

Абсолютная деформация (изменение длины) элементов шарнирно-стержневых систем вычисляется по формуле (1.18). Рассмотрим конкретный пример. На рис.1.5 б) показана статически неопределимая шарнирно - стержневая система. Примем следующие числовые данные $a=1,2$ м, $b=1,4$ м, $h_1=1,2$ м, $h_2=1,6$ м, $F=40$ кН, $q_1= 30$ кН/м. $E_1=E_2=E_3=E$, $A_1=A_2=A_3=A$.

Для заданной системы составлены уравнения равновесия с использованием формул (1.13, 1.14, 1.15):

$$\begin{aligned} \sum M_0=0 & \quad N_3(a+b) - N_2 a - q_1(a+b)\frac{a+b}{2} - F(a+b) = 0 \\ \sum Y=0 & \quad -N_1 - N_2 - F - q_1(a+b) + N_3 = 0 \\ \sum X=0 & \quad 0=0 \end{aligned}$$

Для определения усилий в элементах системы дополнительно составлено уравнение совместности перемещений (1.17₁)

$$(a+b) \left(\frac{-N_2 l_2}{E_2 A_2} - \frac{-N_1 l_1}{E_1 A_1} \right) = a \left(\frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} - \frac{-N_1 l_1}{E_1 A_1} \right)$$

После подстановки в систему уравнений (1.13) – (1.17₁) числовых данных задачи, получаем следующую систему уравнений

$$0N_1 - 1.2N_2 + 2.6N_3 = 205$$

$$- N_1 - N_2 + N_3 = 118$$

$$2,24 N_1 - 4,16 N_2 - 1,44 N_3 = 0$$

Решая систему уравнений, находим:

$$N_1 = -21,19 \text{ кН}, \quad N_2 = -33,37 \text{ кН}, \quad N_3 = 63,44 \text{ кН}.$$

Учитывая условие $A_1 = A_2 = A_3 = A$, определим, что опасным стержнем системы будет стержень 3, в котором действует наибольшее нормальное напряжение.

* пояснения к решению задачи 3 ч. 1 учебного пособия

Выполним подбор поперечных сечений элементов системы

$$A \geq \frac{63,44 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,397 \cdot 10^{-3} \text{ (м}^2\text{)}$$

1.4. Расчет статически неопределимых шарнирно - стержневых систем по методу допускаемых нагрузок*

Продолжим рассмотрение примера расчета статически неопределимой системы (рис.1.5,б).

При расчете по методу допускаемых нагрузок надо рассмотреть состояние системы, которое соответствует полному исчерпанию несущей способности (разрушению) конструкции. Нагрузки, при которых наступает предельное состояние системы, называются разрушающими. Для определения величин разрушающих нагрузок рассмотрим процесс монотонного роста нагрузки. Заданную нагрузку представим в параметрическом виде. В качестве параметра нагрузки примем силу F^{**} :

$$\frac{q_1(a+b)}{F} = \frac{30 \cdot 2.6}{40} = 1.95 \quad \text{или} \quad q_1(a+b) = 1.95 F$$

Выпишем систему уравнений (1.13) – (1.17₁)

$$\begin{aligned} \sum M_0 = 0 \quad & N_3(a+b) - N_2 a - q_1(a+b) \frac{a+b}{2} - F(a+b) = 0 \\ \sum Y = 0 \quad & -N_1 - N_2 - F - q_1(a+b) + N_3 = 0 \end{aligned}$$

$$(a+b) \cdot \left(\frac{-N_2 l_2}{E_2 A_2} - \frac{-N_1 l_1}{E_1 A_1} \right) = a \cdot \left(\frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} - \frac{-N_1 l_1}{E_1 A_1} \right)$$

Используем параметрическое представление нагрузки (заменяем $q_1(a+b)$ на $1,95 F$). Система уравнений (1.13) – (1.17₁) принимает вид

$$0N_1 - 1.2N_2 + 2.6N_3 = 5.135F$$

$$- N_1 - N_2 + N_3 = 2.95F$$

$$2,24 N_1 - 4,16 N_2 - 1,44 N_3 = 0$$

Решая систему уравнений, находим:

$$N_1 = -0,526F, N_2 = -0,834F, N_3 = 1,59F.$$

* пояснения к решению задачи 3 ч. 1, продолжение

** В вариантах, в которых не задана сила F , расчет выполняется для нагрузки q_1 .

Учитывая условие $A_1 = A_2 = A_3 = A$, выясним, что наибольшее напряжение будет в стержне 3. Пластическая деформация в системе возникнет тогда, когда напряжение в третьем стержне достигнет предела текучести. Усилие в третьем стержне становится фиксированным и равным $(\sigma_T \cdot A)$. Нагрузка F_T , соответствующая возникновению пластической деформации, определяется из соотношения:

$$1,59 F_T = \sigma_T A, \quad \text{откуда } F_T = \frac{\sigma_T A}{1,59} = \frac{240 \cdot 10^3 \cdot 0,397 \cdot 10^{-3}}{1,59} = 59,92 \text{ кН}$$

В процессе дальнейшего роста нагрузки пластическая деформация возникнет во втором стержне. При этом усилие во втором стержне становится фиксированным и равным $(\sigma_T \cdot A)$. Возникновение пластической деформации в двух стержнях превращает систему в изменяемую, т. е. наступает разрушение системы. На рис. 1.9, б показана схема, которая соответствует предельному состоянию системы (на рис. 1.9 а показано предельное состояние системы, приведенной на рис. 1.5 а).

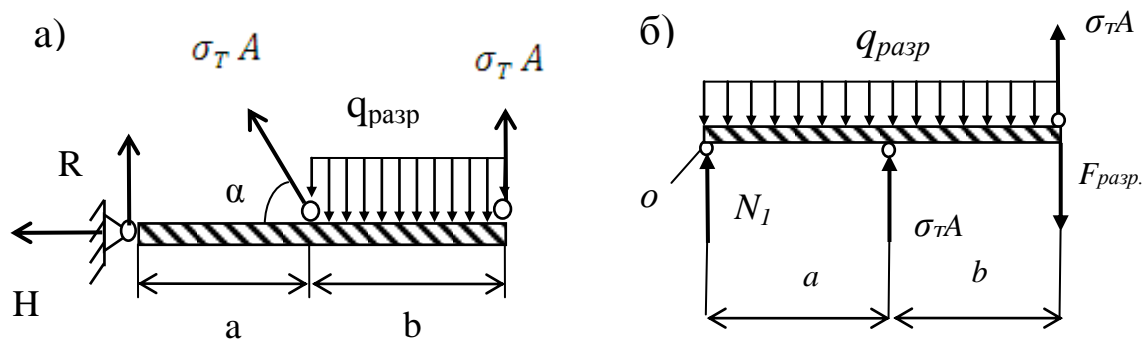


Рис.1.9

Для определения значения параметра $F_{разр}$ составляется уравнение равновесия системы в предельном состоянии (рис.1.9, б)

$$\sum M_o = 0. \quad \sigma_T \cdot A \cdot 1,2 + \sigma_T \cdot A \cdot 2,6 - 1,95 F_{разр} \cdot 1,3 - F_{разр} \cdot 2,6 = 0$$

Получаем $F_{разр} = 70,5$ кН. Вводя коэффициент запаса $n=1,5$, определим величины допускаемых нагрузок по методу допускаемых напряжений и методу допускаемых нагрузок:

$$[F]_{[\sigma]} = \frac{F_T}{n} = \frac{59,92}{1,5} = 39,95 \text{ кН}$$

$$[F]_{[P]} = \frac{F_{разр}}{n} = \frac{70,5}{1,5} = 47 \text{ кН}$$

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФИГУР*

2.1. Основные геометрические характеристики

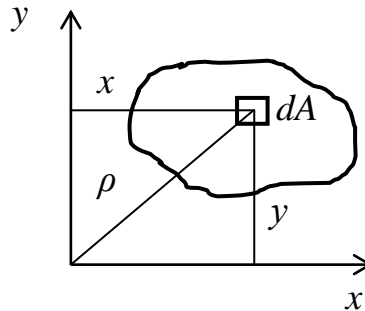


Рис. 2.1

Рассмотрим фигуру на плоскости, в которой введена декартова система координат (рис. 2.1)

Площадь фигуры (рис. 2.1) $A = \int_A dA$.

Статические моменты относительно осей x и y :

$$S_x = \int_A y dA, S_y = \int_A x dA.$$

Если известна площадь фигуры A и координаты центра тяжести (x_C, y_C) , то $S_x = Ay_C$, $S_y = Ax_C$. Отсюда следует, что если оси координат проходят через центр тяжести, то статические моменты относительно них равны нулю. Такие оси называют *центральными*.

Моменты инерции относительно осей x и y :

$$I_x = \int_A y^2 dA, I_y = \int_A x^2 dA.$$

Центробежный момент инерции:

$$I_{xy} = \int_A xy dA.$$

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными осями*.

Полярный момент инерции:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$

2.2. Формулы перехода к параллельным осям

Если известны моменты инерции и статические моменты относительно осей x и y , то моменты инерции относительно осей x_1 и y_1 , параллельных исходным (рис. 2.1), можно найти по формулам:

$$x_1 = x + b, \quad y_1 = y + a$$

* Указания к решению задачи 4, ч. 1

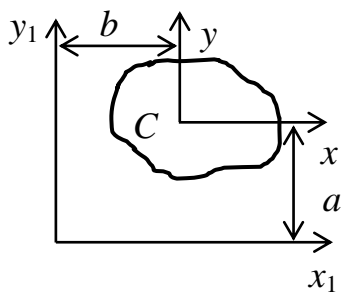


Рис. 2.2

$$I_{x_1} = I_x + 2aS_x + a^2A,$$

$$I_{y_1} = I_y + 2bS_y + b^2A \quad (2.1)$$

$$I_{x_1y_1} = I_{xy} + aS_y + bS_x + abA$$

Если оси x, y – главные центральные, то

$$I_{x_1} = I_x + a^2A, \quad I_{y_1} = I_y + b^2A,$$

$$I_{x_1y_1} = abA \quad (2.2)$$

2.3. Моменты инерции простых фигур

Формулы моментов инерции для прямоугольника (рис. 2.3)

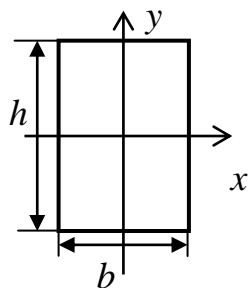


Рис. 2.3

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12} \quad (2.3)$$

$$I_{xy} = 0$$

Формулы моментов инерции для круга (рис. 2.4)

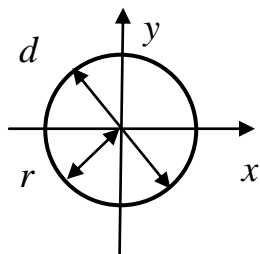


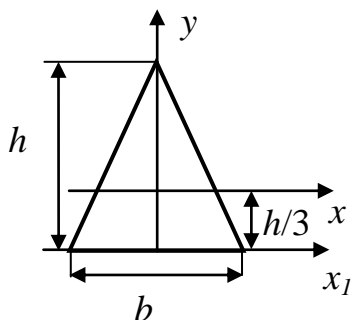
Рис. 2.4

$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \quad (2.4)$$

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_{xy} = 0$$

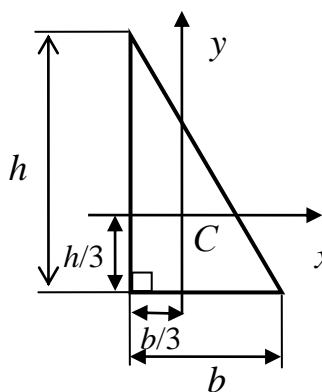
Формулы моментов инерции для равнобедренного треугольника (оси x, y – главные центральные) (рис. 2.5):



$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} \quad (2.5)$$

$$I_y = \frac{b^3h}{48}, \quad I_x = \frac{bh^3}{36}$$

Формулы моментов инерции для прямоугольный треугольника (оси x, y – главные центральные) (рис. 2.6):



$$I_x = \frac{bh^3}{36} \quad (2.6)$$

$$I_y = \frac{b^3h}{36}$$

Рис. 2.6

2.4. Определение центра тяжести

Если фигура имеет две оси симметрии, то центр тяжести лежит на пересечении осей симметрии (рис. 2.7).

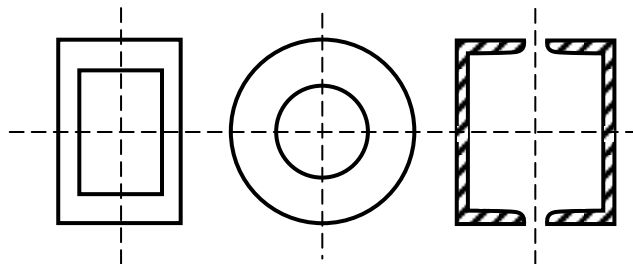
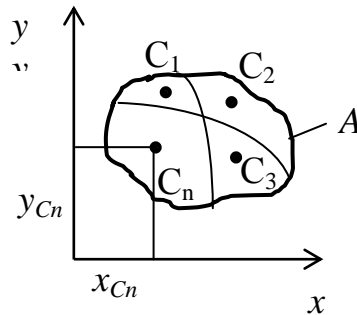


Рис. 2.7

Если фигура имеет одну ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой оси, и нужно найти только одну координату.

В общем случае, когда отсутствуют оси симметрии (рис. 2.8), координаты центра тяжести определяются по формулам:



$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_{Ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{Ci}}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (2.7)$$

A_i – составляющие, на которые разделена площадь A .

x_{Ci}, y_{Ci} – координаты центров тяжести площадей A_i .

Рис. 2.8

Пример 2.1

Требуется определить положение центра тяжести сечения (рис. 2.9 а).

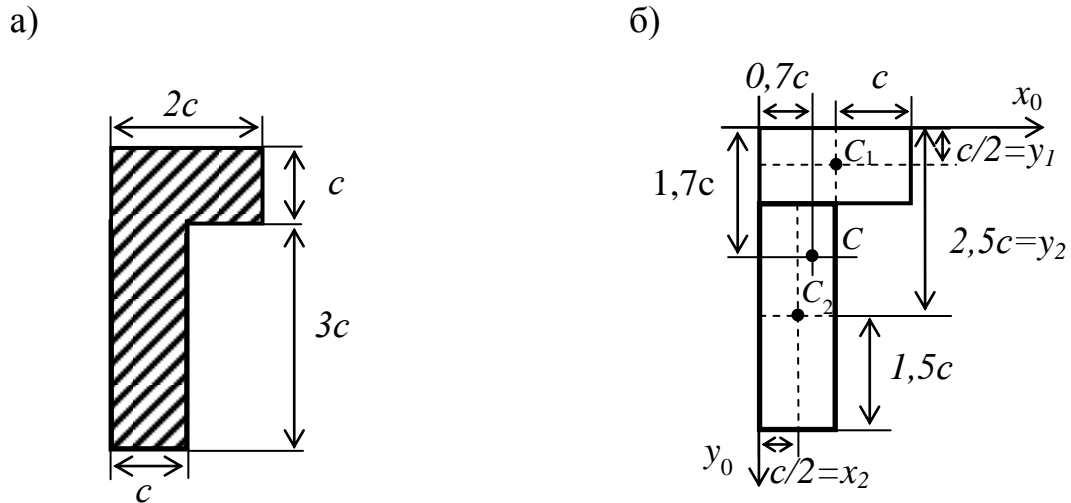


Рис. 2.9

Решение:

1. Для определения положения центра тяжести фигуры введем вспомогательные оси x_0, y_0 (рис. 2.9 б).

2. Делим фигуру на два прямоугольника (рис. 2.9 б) с площадями $A_1 = 2c^2, A_2 = 3c^2$.

Найдем координаты центров тяжести каждого прямоугольника относительно осей x_0, y_0 :

$$x_1 = c, y_1 = 0,5c, x_2 = 0,5c, y_2 = 0,5c + 1,5c = 2,5c.$$

3. Тогда координаты центра тяжести сечения C вычисляются по формулам (2.7):

$$x_c = \frac{c \cdot 2c^2 + 0,5 \cdot 3c^2}{2c^2 + 3c^2} = 0,7c, \quad y_c = \frac{0,5c \cdot 2c^2 + 2,5 \cdot 3c^2}{2c^2 + 3c^2} = 1,7c$$

2.5. Определение моментов инерции

Пример 2.2

Найти моменты инерции сечения (рис. 2.10) относительно главных центральных осей (b – размер полки указанного прокатного профиля).

Решение:

Одной из главных центральных осей является ось симметрии – ось y . Для построения второй необходимо найти центр тяжести фигуры (см. пример 2.1). Сечение разбиваем на две части: 1 – прямоугольник,

2 – двутавр № 20. Размеры и моменты инерции относительно собственных главных центральных осей двутавра берем из сортамента: $h = 20$ см, $b = 10$ см, $d = 0,52$ см, $A_{дв} = 26,8$ см², $I_x^{ос} = 1840$ см⁴, $I_y^{ос} = 115$ см⁴.

Площадь прямоугольника $A_{пр} = 0,1b \cdot 3b = 0,3b^2 = 30$ см². Координата центра тяжести прямоугольника относительно оси x_0 - $y_{пр} = -1,5b$, координата центра тяжести двутавра относительно оси x_0 - $y_{дв} = -(3b+0,5d)$. Координаты $y_{пр}$, $y_{дв}$ отрицательные, т.к. откладываются от оси x_0 в направлении противоположном положительному направлению оси y .

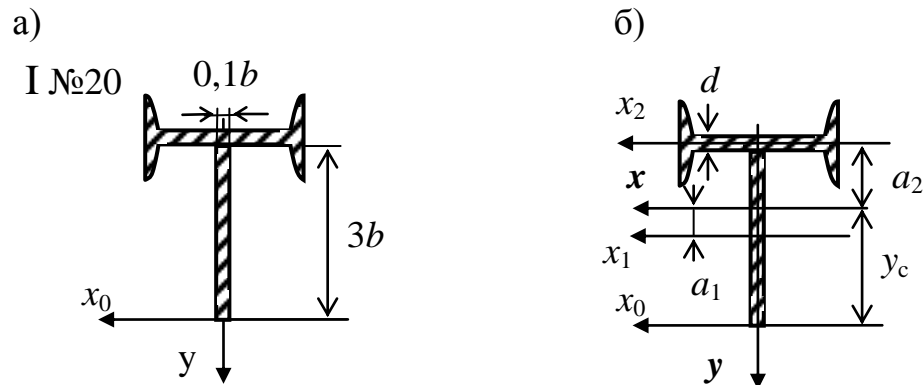


Рис. 2.4

Координата центра тяжести фигуры:

$$y_c = \frac{-1,5b \cdot 0,3b^2 - (3b + 0,5d) \cdot A_{дв}}{0,3b + A_{дв}} = -22,2 \text{ см}$$

Центр тяжести фигуры находится на 22,2 см выше оси x_0 . Вторая главная центральная ось – ось x проходит через центр тяжести перпендикулярно оси y (рис. 2.10 б).

Найдем моменты инерции относительно главных центральных осей.

Главные центральные оси двутавра и прямоугольника не совпадают с осью x , поэтому при подсчете I_x необходимо использовать формулу перехода к параллельным осям (2.2). За a_1 , a_2 обозначим расстояние от главной центральной оси x до осей x_1 и x_2 .

$$a_1 = 22,2 - 1,5b = 22,2 - 15 = 7,2 \text{ см},$$

$$a_2 = 3b + 0,5d - 22,2 = 30 + 0,26 - 22,2 = 8,06 \text{ см}$$

Моменты инерции прямоугольника относительно собственных главных центральных осей находятся по формулам (2.3). Тогда моменты инерции относительно главных центральных осей:

$$I_x = (I_y^{дв} + a_2^2 A_{дв}) + \left(\frac{(3b)^3 \cdot 0,1b}{12} + a_1^2 A_{пр} \right) =$$

$$= (115 + 8,06^2 \cdot 26,8) + \left(\frac{(30)^3 \cdot 1}{12} + 7,2^2 \cdot 30 \right) = 1856,02 + 3805,2 = 5661,22 \text{ см}^4$$

$$I_y = I_x^{дв} + I_y^{пр} = I_x^{дв} + \frac{(0,1b)^3 \cdot 3b}{12} = 1840 + \frac{(1)^3 \cdot 30}{12} = 1842,5 \text{ см}^4$$

Пример 2.3

Найти моменты инерции сечения (рис. 2.11) относительно главных центральных осей.

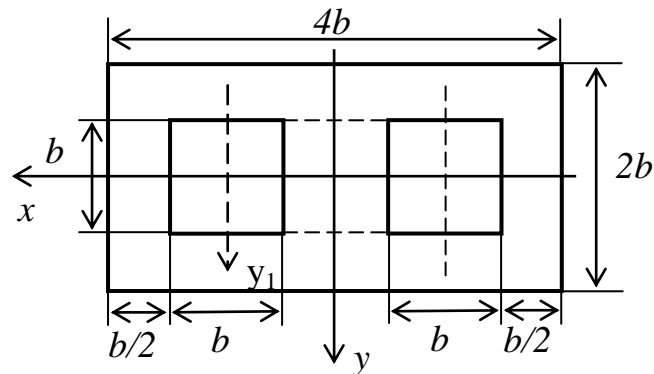


Рис. 2.11

Решение:

Сечение имеет две оси симметрии. Эти оси и являются главными центральными осями. Разбиваем сечение на три простые фигуры – прямоугольник и два вырезанных из него квадрата. Ось x является главной центральной осью для всех фигур. А ось y параллельна главным центральным осям квадратов.

Моменты инерции квадратов относительно собственных главных центральных осей: $I_x^{кв} = I_{y1}^{кв} = \frac{b^4}{12}$, площадь квадрата $A_{кв} = b^2$.

Моменты инерции прямоугольника:

$$I_x^{пр} = \frac{(2b)^3 \cdot 4b}{12}, \quad I_y^{пр} = \frac{2b(4b)^3}{12}$$

Расстояние между центром тяжести квадрата и центром тяжести прямоугольника равно b . Тогда моменты инерции сечения:

$$I_x = I_x^{\text{пр}} - 2I_x^{\text{кв}} = \frac{(2b)^3 4b}{12} - 2 \frac{b^4}{12} = \frac{30b^4}{12} = 2,5b^4,$$

$$I_y = I_y^{\text{пр}} - 2(I_{y1}^{\text{кв}} + b^2 A_{\text{кв}}) = \frac{2b(4b)^3}{12} - 2 \left(\frac{b^4}{12} + b^2 b^2 \right) = \frac{102b^4}{12} = 8,5b^4.$$

При нахождении момента инерции относительно оси y использовали формулу перехода к параллельным осям (2.2).

3. КРУЧЕНИЕ ВАЛОВ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

Кручение возникает при приложении к стержню моментов (пар сил), расположенных в плоскости перпендикулярной оси стержня. Стержень, работающий на кручение, называют валом. При таком нагружении в поперечном сечении вала отлично от нуля только одно внутреннее усилие – крутящий момент M_z . На рис. 3.1 приведено правило знаков для крутящего момента.

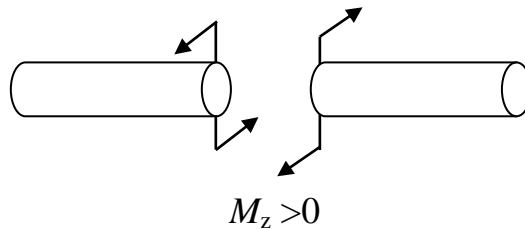


Рис. 3.1

Касательное напряжение при кручении определяется по формуле

$$\tau_\rho = \frac{M_z \rho}{I_p}, \quad (3.1)$$

где I_p – полярный момент инерции,

ρ – расстояние от начала координат до точки, в которой нужно определить напряжение.

Полярные моменты инерции:

для круга :

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (3.2)$$

для кольца:

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad (3.3)$$

где r, d – радиус и диаметр круга;
 R – внешний радиус кольца;
 D – внешний диаметр кольца;
 α – отношение внутреннего радиуса кольца к внешнему.
Условие прочности при кручении:

$$|\tau|_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (3.4)$$

где W_p – полярный момент сопротивления:
для круга

$$W_p = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (3.5)$$

для кольца

$$W_p = \frac{\pi r^3}{2}(1 - \alpha^4) = \frac{\pi d^3}{16}(1 - \alpha^4). \quad (3.6)$$

Угол закручивания:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z}{GI_p} dz,$$

где l – расстояние между сечениями, для которых определяется угол поворота.

Если $M_z = \text{const}$, $GI_p = \text{const}$, то

$$\varphi = \frac{M_z l}{GI_p}. \quad (3.7)$$

Условие жесткости:

$$\theta_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{GI_p} \leq [\theta] = \frac{[\varphi] \cdot \pi}{180^\circ}, \quad (3.8)$$

где $[\theta]$ – удельный допускаемый угол закручивания, измеряемый в рад/м,
 $[\varphi]$ – удельный допускаемый угол закручивания, измеряемый в град/м.

3.1. Построение эпюр крутящего момента

Пример 3.1

Вал (рис. 3.2) загружен моментами $M_1 = 24\text{кНм}$, $M_2 = 40\text{кНм}$, $M_3 = 28\text{кНм}$.
Требуется построить эпюру крутящих моментов.

Решение:

1. Определим реакцию в заделке.

Так как на вал действуют только крутящие моменты, расположенные в плоскостях перпендикулярных оси стержня, то будет только одно уравнение равновесия – сумма моментов относительно оси вала:

$$\sum M_z = 0,$$

$$M_0 + M_3 - M_2 + M_1 = 0; M_0 = -M_3 + M_2 - M_1 = -24 + 40 - 28 = -12 \text{ кНм}$$

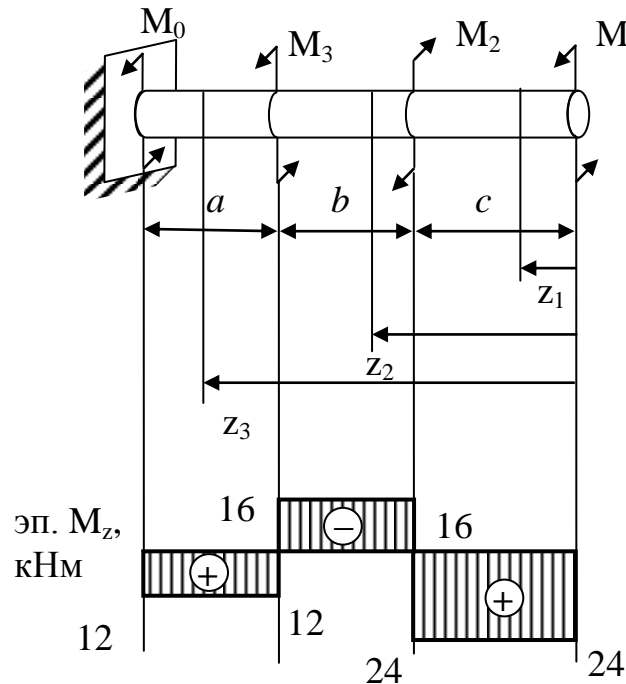


Рис. 3.2

2. Построим эпюру моментов.

Вал имеет три грузовых участка. Методом сечений определим крутящие моменты на каждом из участков. Начнем со свободного конца. Проводим сечение на расстоянии z_1 от правого конца. Рассматриваем правую отсеченную часть. Показываем в проведенном сечении внутреннее усилие, положительное согласно правилу знаков (рис. 3.1), составляем уравнение равновесия.

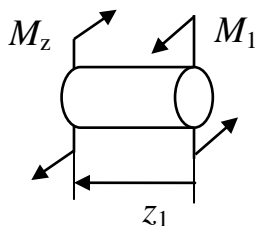


Рис. 3.3

I участок (рис. 3.3):

$$0 \leq z_1 \leq c$$

$$M_{z1} = M_1 = 24 \text{ кНм}$$

Проводим сечение в пределах второго грузового участка – на расстоянии z_2 от правого конца вала, рассматриваем правую отсеченную часть.

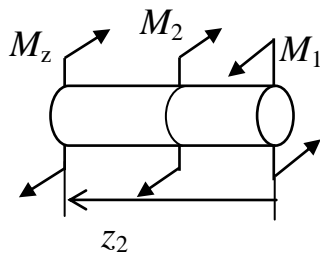


Рис. 3.4

II участок (рис. 3.4):

$$c \leq z_2 \leq c+b$$

$$M_{z_2} = M_1 - M_2 = 24 - 40 = -16 \text{ кНм}$$

Проводим сечение в пределах третьего грузового участка – на расстоянии z_3 от правого конца вала, рассматриваем правую отсеченную часть.

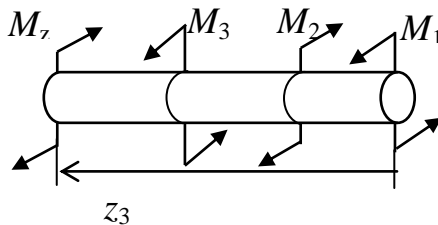


Рис. 3.5

III участок (рис. 3.5):

$$c+b \leq z_3 \leq c+b+a$$

$$M_{z_3} = M_1 - M_2 + M_3 = 24 - 40 + 28 = 12 \text{ кНм}$$

Функции крутящих моментов на каждом из участков представляют собой постоянную величину. Эпюра моментов изображена на рисунке 3.2.

3. Проверка: в сечениях, где приложены внешние сосредоточенные моменты, на эпюре крутящего момента должны быть скачки на величину этих моментов.

Пример 3.2

Вал нагружен моментами $M_1 = 16 \text{ кНм}$, $M_2 = 18 \text{ кНм}$, $M_3 = 30 \text{ кНм}$ (рис. 3.6). Требуется построить эпюру крутящих моментов. Опорные подшипники не препятствуют повороту вала относительно оси, трением в них пренебрегаем.

Решение:

1. Определим неизвестный момент M_0 .

Запишем уравнение равновесия – сумма моментов относительно оси вала.

$$\sum M_z = 0$$

$$M_1 + M_2 - M_0 - M_3 = 0; M_0 = M_1 + M_2 - M_3 = 16 + 18 - 30 = 4 \text{ кНм}$$

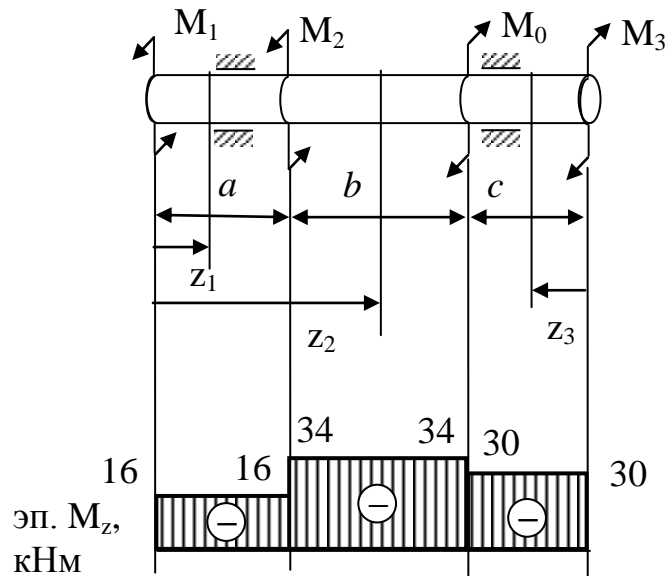


Рис. 3.6

2. Построим эпюру моментов.

Вал имеет три грузовых участка. Методом сечений определим крутящие моменты на каждом из участков.

Проводим сечение на расстоянии z_1 от левого конца вала. Рассматриваем левую отсеченную часть. Показываем в проведенном сечении внутреннее усилие, положительное согласно правилу знаков (рис. 3.1), составляем уравнение равновесия.

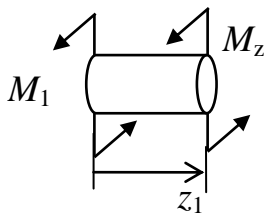


Рис. 3.7

I участок (рис. 3.7):

$$0 \leq z_1 \leq a$$

$$M_{z1} = -M_1 = -16 \text{ кНм}$$

Проводим сечение на втором грузовом участке расстоянии z_2 от левого конца вала. Рассматриваем левую отсеченную часть.

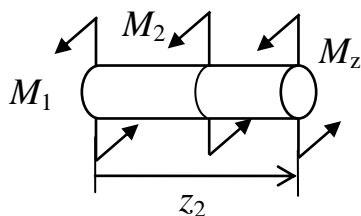


Рис. 3.8

II участок (рис. 3.8):

$$a \leq z_2 \leq a+b$$

$$M_{z2} = -M_1 - M_2 = -16 - 18 = -34 \text{ кНм}$$

Проводим сечение на третьем грузовом участке на расстоянии z_3 от правого конца вала. Рассматриваем правую отсеченную часть. Записываем уравнение равновесия и выражаем крутящий момент M_z .

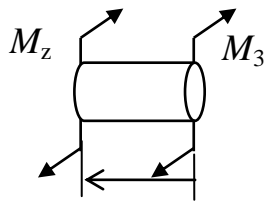


Рис. 3.9

III участок (рис. 3.9):

$$0 \leq z_3 \leq c$$

$$M_{z3} = -M_3 = -30 \text{ кНм}$$

Функции крутящих моментов на каждом из участков представляют собой постоянную величину. Эпюра моментов изображена на рисунке 3.3.

Проверка: в сечениях, где приложены внешние сосредоточенные моменты, на эпюре крутящего момента должны быть скачки на величину этих моментов.

3.2. Подбор сечения и определение деформации вала

Пример 3.3

Для стального вала, нагруженного крутящими моментами (рис. 3.10),

1. из условия равновесия найти M_0 ;
2. построить эпюру крутящего момента;
3. подобрать диаметр сплошного вала кругового сечения по условиям прочности и жесткости;
4. подобрать диаметр полого вала по условиям прочности и жесткости, приняв отношение внутреннего диаметра к внешнему равным 0.8;
5. вычислить в процентах величину экономии материала для полого вала;
6. построить эпюру углов закручивания, приняв в качестве неподвижного левое крайнее сечение.

Материал стержня сталь, $[\tau] = 80 \text{ МПа}$, $G = 0.8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $M_1 = 60 \text{ кНм}$, $M_2 = 15 \text{ кНм}$, $M_3 = 50 \text{ кНм}$, $[\varphi] = 0,3 \text{ град/м}$, $a = 1,2 \text{ м}$, $b = 2,1 \text{ м}$, $c = 1,5 \text{ м}$.

Решение:

1. Из уравнения равновесия находим M_0 :

$$M_0 = -M_3 - M_1 + M_2 = -50 - 60 + 15 = -95 \text{ кНм}$$

2. Вал имеет три грузовых участка. Воспользовавшись методом сечений, находим крутящие моменты по участкам.

Эпюра крутящего момента представлена на рисунке 3.10.

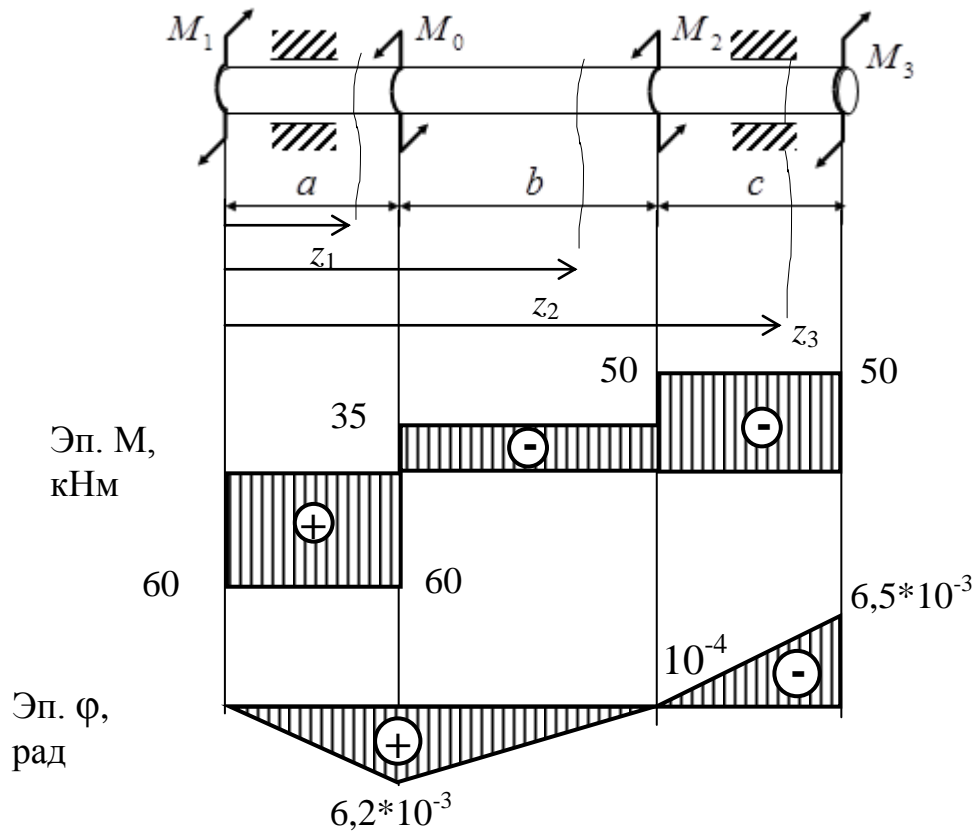


Рис. 3.10

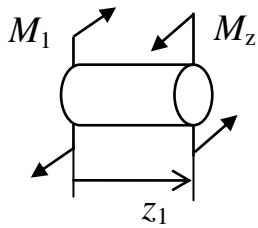


Рис. 3.11

I участок (рис. 3.11).

$$0 \leq z_1 \leq a$$

$$M_{z1} = M_1 = 60 \text{ кНм}$$

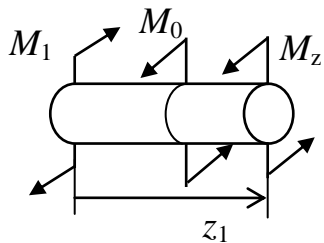
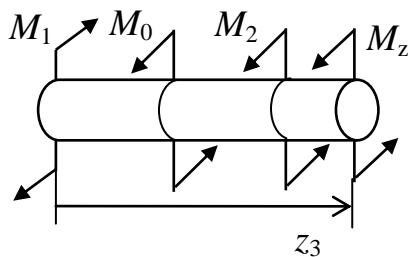


Рис. 3.12

II участок (Рис. 3.12).

$$a \leq z_2 \leq a+b$$

$$M_{z2} = M_1 - M_0 = 60 - 95 = -35 \text{ кНм}$$



III участок (рис. 3.13).

$$a + b \leq z_3 \leq a + b + c$$

$$M_{z3} = M_1 - M_0 - M_2 = 60 - 95 - 15 = -50 \text{ кНм}$$

Рис. 3.13

3. Из условий прочности (3.4) и жесткости (3.8) подберем сечение вала в виде круга.

Условие прочности:

$$|\tau|_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_p} \leq [\tau] \Rightarrow W_p \geq \frac{|M_z|_{\max}}{[\tau]}$$

Полярный момент сопротивления для круга:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Определяем диаметр круга из условия прочности:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16|M_z|_{\max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 60 \text{ кНм}}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2}} = 0,156 \text{ м}$$

Условие жесткости:

$$|\theta|_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{GI_p} \leq [\theta] = \frac{[\varphi]\pi}{180^\circ}$$

Полярный момент инерции для круга:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Определяем диаметр круга из условия жесткости:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32|M_z|_{\max} 180^\circ}{\pi^2 [\varphi] G}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 60 \text{ кНм} \cdot 180^\circ}{3,14^2 \cdot 0,3^\circ/\text{м} \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2}} = 0,196 \text{ м}$$

Выбираем наибольший диаметр вала $d = 19,6 \text{ см}$.

4. Подберем диаметр полого вала по условиям прочности и жесткости, приняв отношение внутреннего диаметра к внешнему $\alpha = \frac{d}{D} = 0,8$.

Полярный момент сопротивления и полярный момент инерции для кольца:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4), \quad I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4).$$

Определяем диаметр кольца из условия прочности:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16|M_z|_{\max}}{\pi[\tau](1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 60 \text{ кНм}}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 (1 - 0,8^4)}} = 0,186 \text{ м}$$

Определяем диаметр кольца из условия жесткости:

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32|M_z|_{\max} \cdot 180^\circ}{\pi^2[\varphi]G(1 - \alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 60 \text{ кНм} \cdot 180^\circ}{3,14^2 \cdot 0,3^\circ/\text{м} \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 (1 - 0,8^4)}} = 0,224 \text{ м}$$

Выбираем наибольший диаметр вала $D = 22,4$ см.

5. Вычислим в процентах величину экономии материала для полого вала:

$$\begin{aligned} \frac{A_{\text{кр}} - A_{\text{кол}}}{A_{\text{кр}}} \cdot 100\% &= \frac{d^2 - D^2(1 - \alpha^2)}{d^2} \cdot 100\% = \\ &= \frac{19,6^2 - 22,4^2(1 - 0,8^2)}{19,6^2} \cdot 100\% = 53\% \end{aligned}$$

6. Построим эпюру углов закручивания вала, используя формулу

$$\varphi = \int_0^z \frac{M_{zi} dz}{GI_p}, \quad \text{где } M_{zi} \text{ — крутящий момент на соответствующем участке эпюры.}$$

Поскольку сечение в виде кольца более выгодно, то построим эпюру углов закручивания для полого вала, приняв в качестве неподвижного левое крайнее сечение.

Момент инерции кольца:

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4) = 14585,4 \text{ см}^4.$$

Тогда жесткость вала на кручение:

$$GI_p = 14585,4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 = 11668,32 \text{ кНм}^2$$

Поскольку в пределах грузового участка крутящий момент и жесткость вала постоянны, для подсчета углов закручивания в пределах грузового участка можно использовать формулу (3.7).

Участок I: $0 \leq z_1 \leq a$

$$\varphi_1(z_1) = \frac{M_{z_1} z_1}{GI_p} = \frac{60z_1}{11668,32};$$

Угол закручивания представляет собой линейную функцию от z_1 . График линейной функции – прямая наклонная линия. Чтобы построить эпюру φ_1 , необходимо найти значения функции в двух точках - начале и конце грузового участка:

$$\varphi_1(0) = 0; \quad \varphi_1(a) = 0,0062 \text{ рад.}$$

Участок II: $a \leq z_2 \leq a+b$

$$\varphi_2(z_2) = \frac{M_{z_1} a}{GI_p} + \frac{M_{z_2} (z_2 - a)}{GI_p} = 0,0062 + \frac{(-35)(z_2 - a)}{GI_p};$$

$$\varphi_2(a) = 0,0062 \text{ рад}; \quad \varphi_2(a+b) = 0,0062 - 0,0063 = -10^{-4} \text{ рад.}$$

Участок III: $a+b \leq z_3 \leq a+b+c$

$$\varphi_3(z_3) = \frac{M_{z_1} a}{GI_p} + \frac{M_{z_2} b}{GI_p} + \frac{M_{z_3} (z_3 - a - b)}{GI_p};$$

$$\varphi_3(a+b) = -10^{-4} \text{ рад}; \quad \varphi_3(a+b+c) = -10^{-4} - 0,0064 = -0,0065 \text{ рад.}$$

Эпюра углов закручивания представлена на рис. 3.10.

4. ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

В общем случае плоского изгиба в поперечных сечениях стержня возникают два внутренних усилия: поперечная сила и изгибающий момент. В случае, когда изгибающий момент – единственное внутреннее усилие, изгиб называется чистым. Если наряду с изгибающим моментом возникает поперечная сила, то изгиб называется поперечным. Стержень, работающий на изгиб, обычно называют балкой.

Условия реализации плоского изгиба: все внешние силы лежат в одной плоскости, включающей в себя ось стержня; все внешние силы перпендикулярны оси стержня; плоскость действия сил включает в себя главную ось инерции поперечного сечения.

4.1. Построение эпюр внутренних усилий.

Графики, показывающие изменение внутренних усилий по длине балки называют эпюрами.

Для определения знаков поперечной силы и изгибающего момента рекомендованы следующие правила.

Поперечная сила считается положительной, если она вращает отсеченную часть по часовой стрелке; изгибающий момент положителен, если он растягивает нижние волокна балки. На рис. 4.1 показаны положительные направления поперечной силы и изгибающего момента согласно принятому правилу знаков.

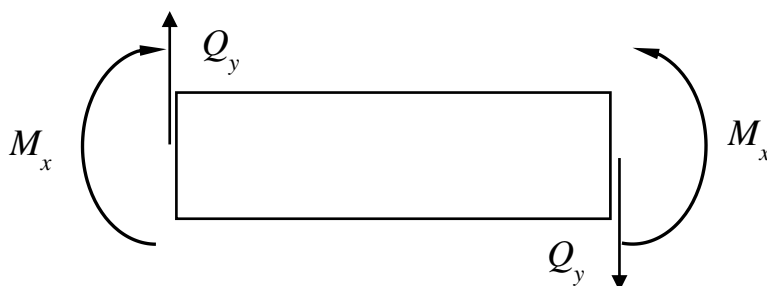


Рис. 4.1

Изгибающий момент M_x , поперечная сила Q_y и интенсивность распределенной нагрузки q в выбранном сечении связаны между собой дифференциальными зависимостями:

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q_y; \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y.$$

Они позволяют установить качественный характер изменения внутренних усилий на участках балки. Так, если на некотором участке балки $q = 0$, то поперечная сила Q_y постоянна, а изгибающий момент M_x изменяется по линейному закону. Если некоторый участок балки нагружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q , то поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент – по закону параболы.

На основании дифференциальной зависимости $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$ можно определить положение сечения, в котором изгибающий момент достигает экстремального значения (максимального или минимального). Для этого выражение для поперечной силы приравнивают к нулю и из получившегося уравнения определяют абсциссу z этого сечения.

В сечениях, где приложена внешняя сосредоточенная сила, на эпюре Q_y будет "скачок" на величину этой силы; там, где приложен внешний сосредоточенный момент – "скачок" на эпюре M_x на величину этого момента.

Пример 4.1.

Построить эпюры внутренних усилий для балки, изображенной на рис. 4.2.

Дано: $a = 2\text{ м}$; $b = 3\text{ м}$; $F = 15\text{ кН}$; $M = 20\text{ кНм}$; $q = 10\text{ кН/м}$.

Решение.

Определяем опорные реакции. Реакции в опоре B (жесткая заделка): M_B - опорный момент, H_B и R_B - реакции, направленные вдоль и перпендикулярно оси стержня соответственно; равнодействующая распределенной нагрузки q приложена в середине участка, на котором она действует, и равна qa (рис.4.2).

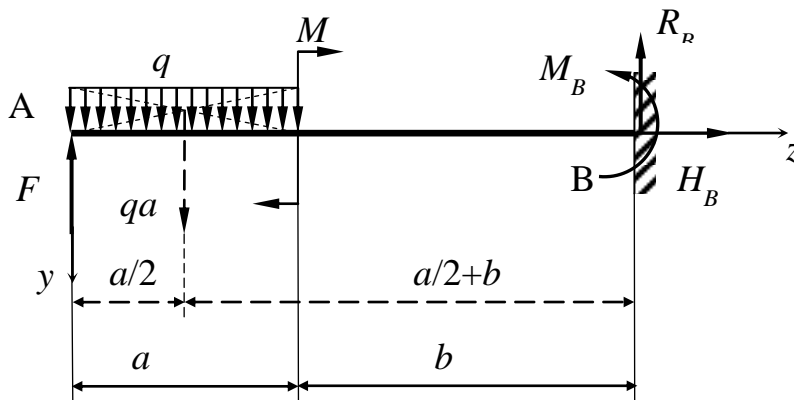


Рис. 4.2

Составляем уравнения равновесия.

Сумма моментов относительно опоры B :

$$\sum_i M_i^B = 0; \quad M_B - F \cdot (a + b) + qa \cdot (a / 2 + b) - M = 0,$$

откуда

$$M_B = F \cdot (a + b) - qa \cdot (a / 2 + b) + M = 15 \cdot 5 - 10 \cdot 2 \cdot 4 + 20 = 15\text{ кНм}$$

Сумма проекций сил на вертикальную ось OY (перпендикулярно оси балки):

$$\sum_i Y_i = 0; \quad -F + qa - R_B = 0, \quad \Rightarrow R_B = -F + qa = -15 + 10 \cdot 2 = 5\text{ кН}$$

Сумма проекций на ось OZ (вдоль оси балки):

$$\sum_i Z_i = 0; H_B = 0$$

этот результат очевиден, поскольку в условиях плоского изгиба все внешние силы ортогональны оси стержня. В дальнейшем при решении задач плоского изгиба реакции в жесткой заделке и шарнирно-неподвижной опоре, направленные вдоль оси стержня, показывать не будем.

Проверку правильности найденных значений опорных реакций производим по уравнению суммы моментов относительно А:

$$\sum_i M_i^A = 0; M_B + R_B \cdot (a + b) - M - qa \cdot \frac{a}{2} = 15 + 5 \cdot 5 - 20 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 0,$$

отсюда определяем, что реакции вычислены правильно.

Методом сечений строим эпюры внутренних усилий (рис.4.3).

На балке можно выделить два грузовых участка. Проводим сечение I в пределах первого грузового участка – на расстоянии z_1 ($0 \leq z_1 \leq a = 2$ м) от левого конца балки, рассматриваем левую отсеченную часть. Показываем в проведенном сечении внутренние усилия, положительные согласно правилу знаков, показываем равнодействующую и точку ее приложения от распределенной нагрузки, действующей на отсеченную часть; составляем уравнения равновесия.

Сумма проекций на вертикальную ось OY:

$$\sum_i Y_i = 0; -F + qz_1 + Q_y = 0, \Rightarrow Q_y = F - qz_1$$

Поперечная сила изменяется по длине балки по линейному закону. Для построения линейной функции вычисляем ее значение в начале и конце рассматриваемого грузового участка:

при $z_1 = 0$ $Q_y = F = 15 \text{ кН}$; при $z_1 = a = 2 \text{ м}$ $Q_y = 15 - 10 \cdot 2 = -5 \text{ кН}$.

Поперечная сила в начале и конце рассматриваемого участка имеет разные знаки. Поэтому в некотором сечении она обращается в ноль. Приравняв выражение для поперечной силы к нулю, получаем уравнение, из которого определяем координату искомого сечения:

$$Q_y = F - qz_1^* = 0 \Rightarrow z_1^* = \frac{F}{q} = \frac{15}{10} = 1,5 \text{ м}$$

Сумма моментов относительно проведенного сечения I:

$$\sum_i M_x^i = 0; M_x + qz_1 \cdot \frac{z_1}{2} - F \cdot z_1 = 0 \Rightarrow M_x = F \cdot z_1 - qz_1 \cdot \frac{z_1}{2}$$

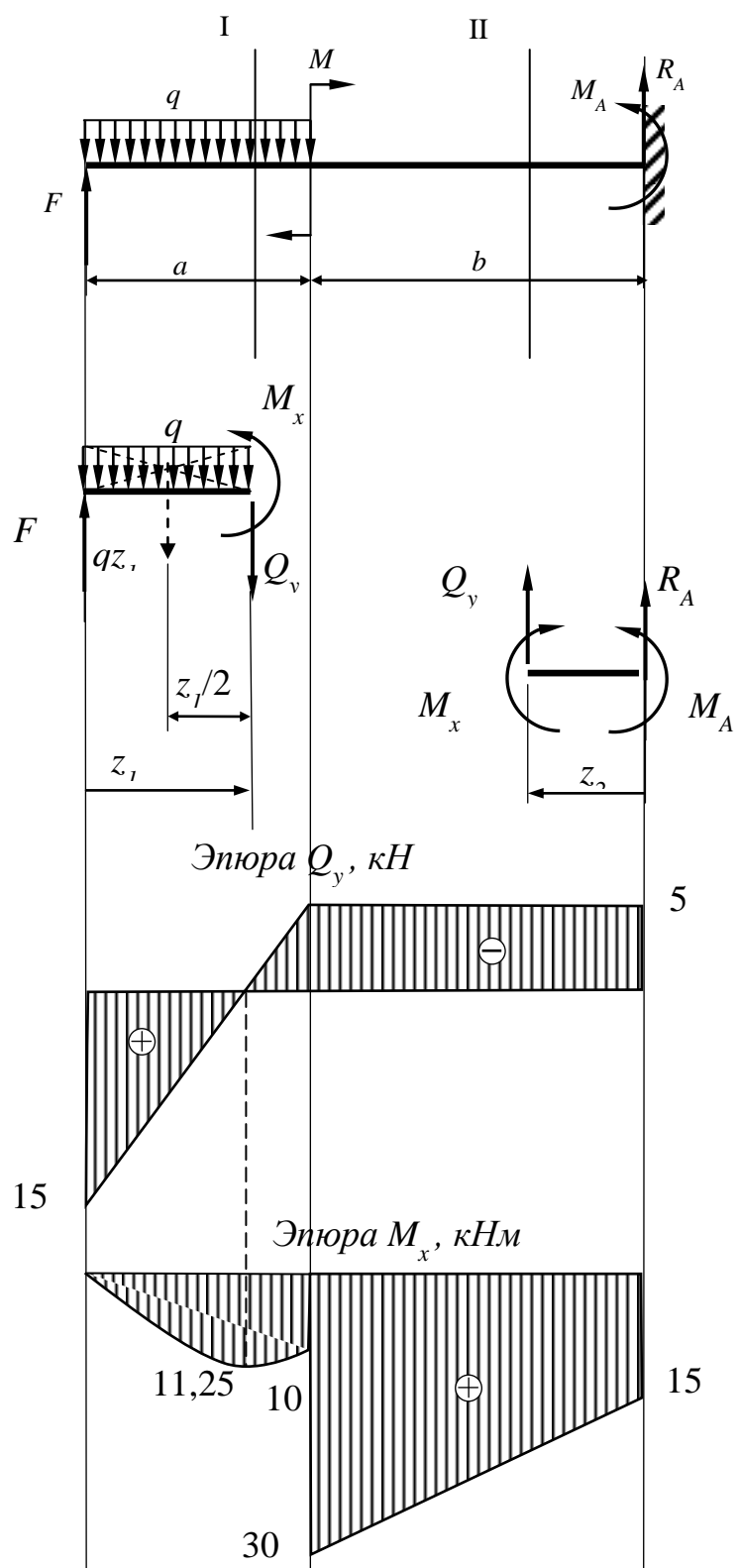


Рис. 4.3

Изгибающий момент по длине балки изменяется по закону квадратной параболы, для построения которой необходимо знать значение в трех точках. Две точки – начало и конец, участка, третья – или там, где поперечная сила обращается в ноль (при этом изгибающий момент достигает экстремального значения), или середина участка. В рассматриваемом примере Q_y обращается в ноль при $z_1^* = 1,5 м$, ее и берем в качестве третьей, тогда: при $z_1 = 0$ $M_x = 0$; при $z_1 = a = 2 м$ $M_x = 15 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 10 кНм$; при $z_1^* = 1,5 м$ $M_x = 15 \cdot 1,5 - 10 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 11,25 кНм$.

Проводим сечение II в пределах второго грузового участка – на расстоянии z_2 ($0 \leq z_2 \leq b = 3 м$) от правого конца балки, рассматриваем правую отсеченную часть. Показываем в проведенном сечении внутренние усилия, положительные согласно правилу знаков, показываем опорные реакции как внешние силы, действующие на отсеченную часть; составляем уравнения равновесия.

Сумма проекций на вертикальную ось OY:

$$\sum_i Y_i = 0; \quad -R_B - Q_y = 0, \quad \Rightarrow Q_y = -R_B = -5 кН$$

Поперечная сила в пределах второго грузового участка постоянна. График постоянной – прямая, параллельная оси абсцисс.

Сумма моментов относительно проведенного сечения II:

$$\sum_i M_x^i = 0; \quad -M_x + R_B \cdot z_2 + M_B = 0 \Rightarrow M_x = R_B \cdot z_2 + M_B$$

Изгибающий момент изменяется по длине балки по линейному закону. Для построения линейной функции вычисляем ее значение в начале и конце рассматриваемого грузового участка: при $z_2 = 0$ $M_x = M_B = 15 кНм$; при $z_2 = b = 3 м$ $M_x = M_B + R_B \cdot b = 15 + 3 \cdot 5 = 30 кНм$.

По полученным выражениям для M_x и Q_y в масштабе строятся эпюры внутренних усилий (рис.4.3).

Пример 4.2.

Построить эпюры внутренних усилий для балки, изображенной на рис. 4.4.

Дано: $a = 1 м$; $b = 4 м$; $M = 30 кНм$; $q = 15 кН/м$.

Решение.

Показываем опорные реакции R_A и R_B , равнодействующую распределенной нагрузки qb и место ее приложения (рис.4.4).

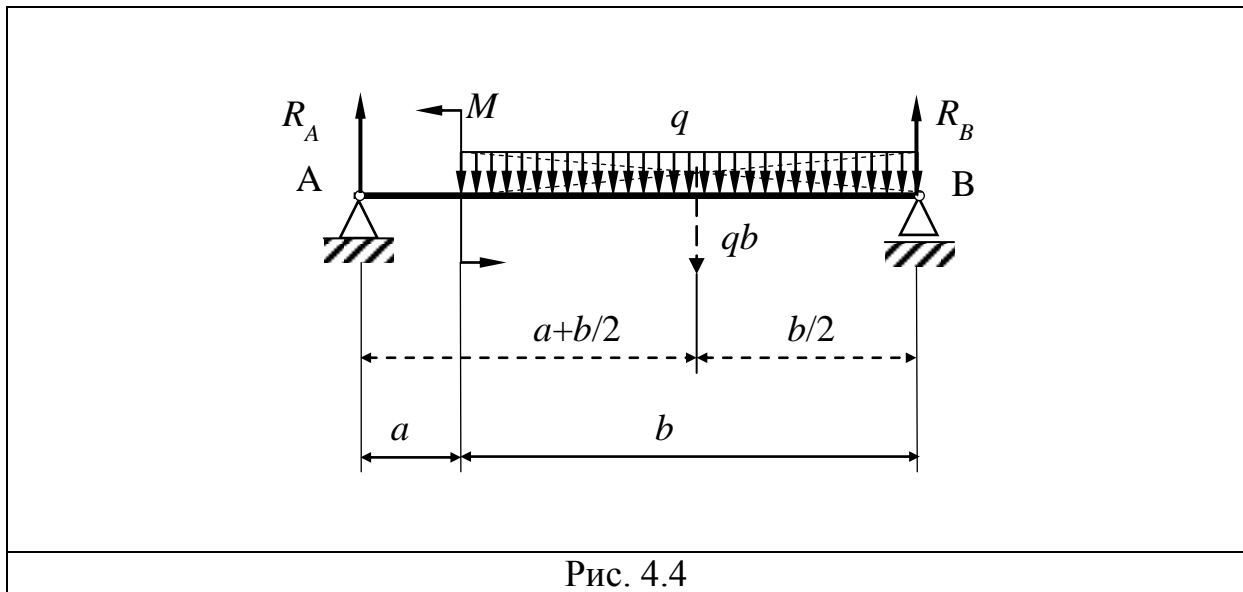


Рис. 4.4

Составляем уравнения равновесия.

Сумма моментов относительно опоры А:

$$\sum_i M_i^A = 0; \quad M - qb \cdot (a + b/2) + R_B \cdot (a + b) = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{qb \cdot (a + b/2) - M}{a + b} = \frac{15 \cdot 4 \cdot 3 - 30}{5} = 30 \text{ кН}.$$

Сумма моментов относительно опоры В:

$$\sum_i M_i^B = 0; \quad M + qb \cdot b/2 - R_A \cdot (a + b) = 0,$$

откуда

$$R_A = \frac{qb \cdot b/2 + M}{a + b} = \frac{15 \cdot 4 \cdot 2 + 30}{5} = 30 \text{ кН}.$$

Проверку правильности найденных значений опорных реакций производим по уравнению суммы проекций сил на вертикальную ось ОУ:

$$\sum_i Y_i = -R_A - R_B + qb = -30 - 30 + 15 \cdot 4 = 0.$$

Делаем вывод, что реакции вычислены правильно.

Методом сечений строим эпюры внутренних усилий (рис.4.5).

На балке можно выделить два грузовых участка. Проводим сечение I в пределах первого грузового участка – на расстоянии z_I ($0 \leq z_I \leq a=1$ м) от левого конца балки, рассматриваем левую отсеченную часть. Показываем в проведенном сечении внутренние усилия, положительные согласно правилу знаков, составляем уравнения равновесия.

Сумма проекций на вертикальную ось ОУ:

$$\sum_i Y_i = 0; \quad -R_A + Q_y = 0, \quad \Rightarrow Q_y = R_A = 30 \text{ кН}$$

Поперечная сила по длине участка балки постоянна.

Сумма моментов относительно проведенного сечения I:

$$\sum_i M_x^i = 0; \quad M_x - R_A \cdot z_1 = 0, \quad \Rightarrow M_x = R_A \cdot z_1$$

Изгибающий момент изменяется по длине балки по линейному закону. Для построения линейной функции вычисляем ее значение в начале и конце рассматриваемого грузового участка:

при $z_1 = 0$ $M_x = 0$; при $z_1 = a = 1 \text{ м}$ $M_x = R_A \cdot a = 30 \cdot 1 = 30 \text{ кНм}$.

Проводим сечение II в пределах второго грузового участка – на расстоянии z_2 ($0 \leq z_2 \leq b = 4 \text{ м}$) от правого конца балки, рассматриваем правую отсеченную часть. Показываем в проведенном сечении внутренние усилия, положительные согласно правилу знаков, показываем равнодействующую qz_2 и точку ее приложения от распределенной нагрузки, действующей на отсеченную часть; составляем уравнения равновесия.

Сумма проекций на вертикальную ось ОУ:

$$\sum_i Y_i = 0; \quad -R_B - Q_y + qz_2 = 0, \quad \Rightarrow Q_y = qz_2 - R_B$$

Поперечная сила изменяется по длине балки по линейному закону.

Для построения линейной функции вычисляем ее значение в начале и конце рассматриваемого грузового участка:

при $z_2 = 0$ $Q_y = -R_B = -30 \text{ кН}$;

при $z_2 = b = 4 \text{ м}$ $Q_y = 30 - 15 \cdot 4 = -30 \text{ кН}$.

Поперечная сила в начале и конце рассматриваемого участка имеет разные знаки. Поэтому в некотором сечении она обращается в ноль. Приравняв выражение для поперечной силы к нулю, получаем уравнение, из которого определяем координату искомого сечения:

$$Q_y = qz_2^* - R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad z_2^* = \frac{R_B}{q} = \frac{30}{15} = 2 \text{ м}$$

Сумма моментов относительно проведенного сечения II:

$$\sum_i M_x^i = 0; \quad R_B \cdot z_2 - M_x - qz_2 \cdot \frac{z_2}{2} = 0 \Rightarrow M_x = R_B \cdot z_2 - qz_2 \cdot \frac{z_2}{2}$$

Изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы. Для построения эпюры выбираем три точки – начало и конец рассматриваемого участка и точку, в которой поперечная сила обращается в ноль ($z_2^* = 2 \text{ м}$), а изгибающий момент достигает экстремального значения: при

$z_2 = 0 \quad M_x = 0;$ при $z_2^* = 2 \text{ м} \quad M_x = 30 \cdot 2 - 15 \cdot 2 \cdot 1 = 30 \text{ кНм};$ при
 $z_2^* = 4 \text{ м} \quad M_x = 30 \cdot 4 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0.$

По полученным выражениям для M_x и Q_y в масштабе строятся эпюры внутренних усилий (рис.4.5).

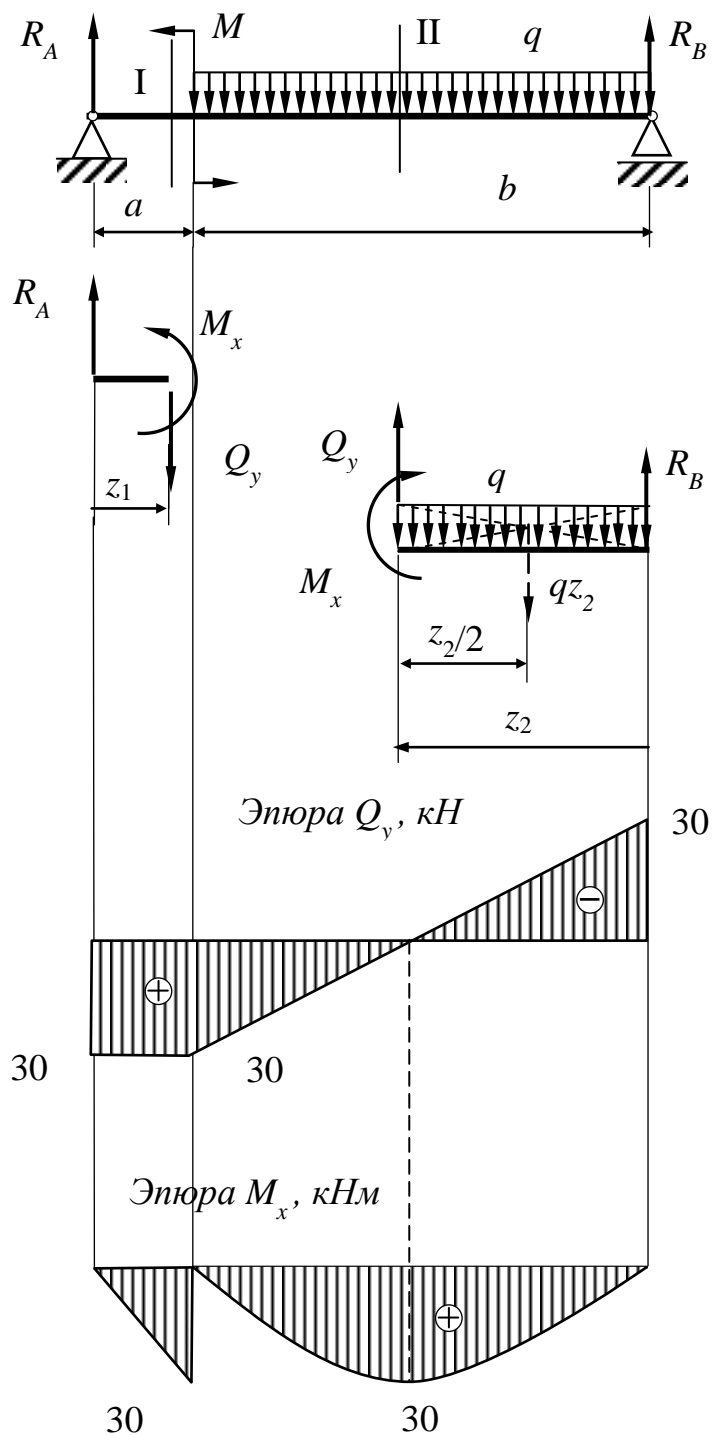


Рис. 4.5

Пример 4.3.

Построить эпюры внутренних усилий для балки, изображенной на рис. 4.6.

Дано: $a = 4\text{ м}$; $b = 1\text{ м}$; $M = 20\text{ кНм}$; $F = 10\text{ кН}$; $q = 20\text{ кН/м}$.

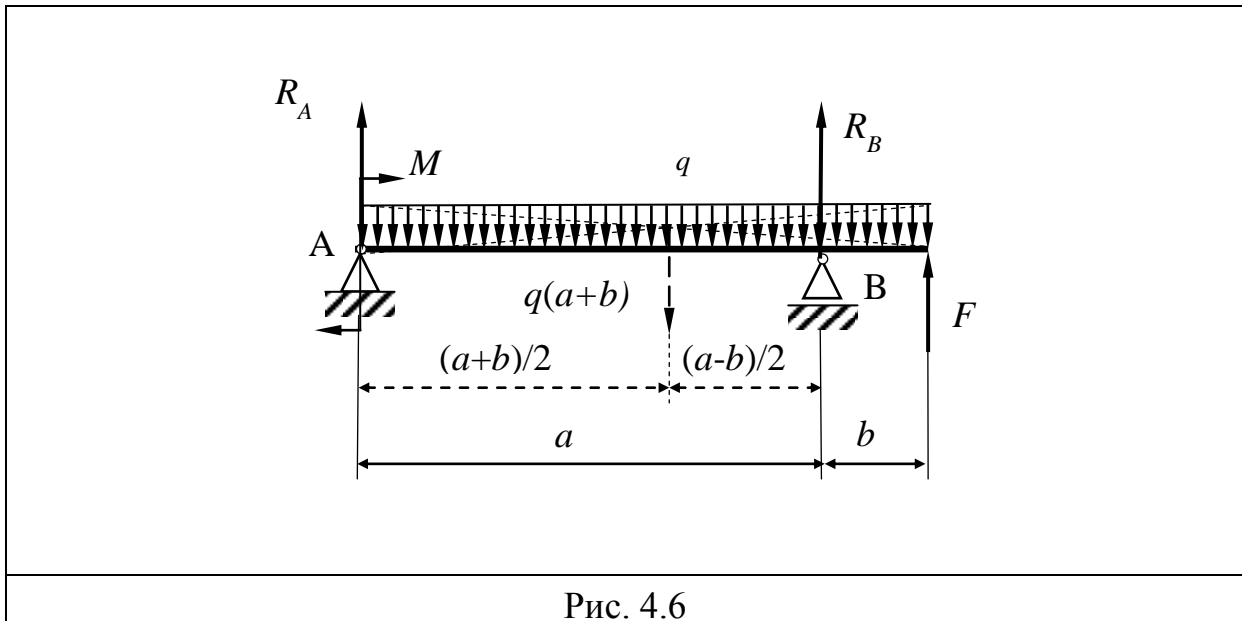


Рис. 4.6

Решение.

Показываем опорные реакции R_A и R_B , равнодействующую распределенной нагрузки $q(a+b)$ и место ее приложения (рис.4.4).

Составляем уравнения равновесия.

Сумма моментов относительно опоры А:

$$\sum_i M_i^A = 0; \quad -M - q(a+b) \cdot (a+b)/2 + R_B \cdot a + F \cdot (a+b) = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{M + q(a+b)^2 / 2 - F \cdot (a+b)}{a} = \frac{20 + 20 \cdot 5^2 / 2 - 10 \cdot 5}{4} = 55\text{ кН}.$$

Сумма моментов относительно опоры В:

$$\sum_i M_i^B = 0; \quad -M + q(a+b) \cdot (a-b)/2 - R_A \cdot a + F \cdot b = 0,$$

откуда

$$R_A = \frac{q(a+b) \cdot (a-b)/2 - M + F \cdot b}{a} = \frac{20 \cdot 5 \cdot 1,5 - 20 + 10 \cdot 1}{4} = 35\text{ кН}.$$

Проверку правильности найденных значений опорных реакций производим по уравнению суммы проекций сил на вертикальную ось ОУ:

$$\sum_i Y_i = -R_A - R_B + q(a+b) - F = -35 - 55 + 20 \cdot 5 - 10 = 0.$$

Реакции вычислены правильно.

Методом сечений строим эпюры внутренних усилий (рис.4.7).

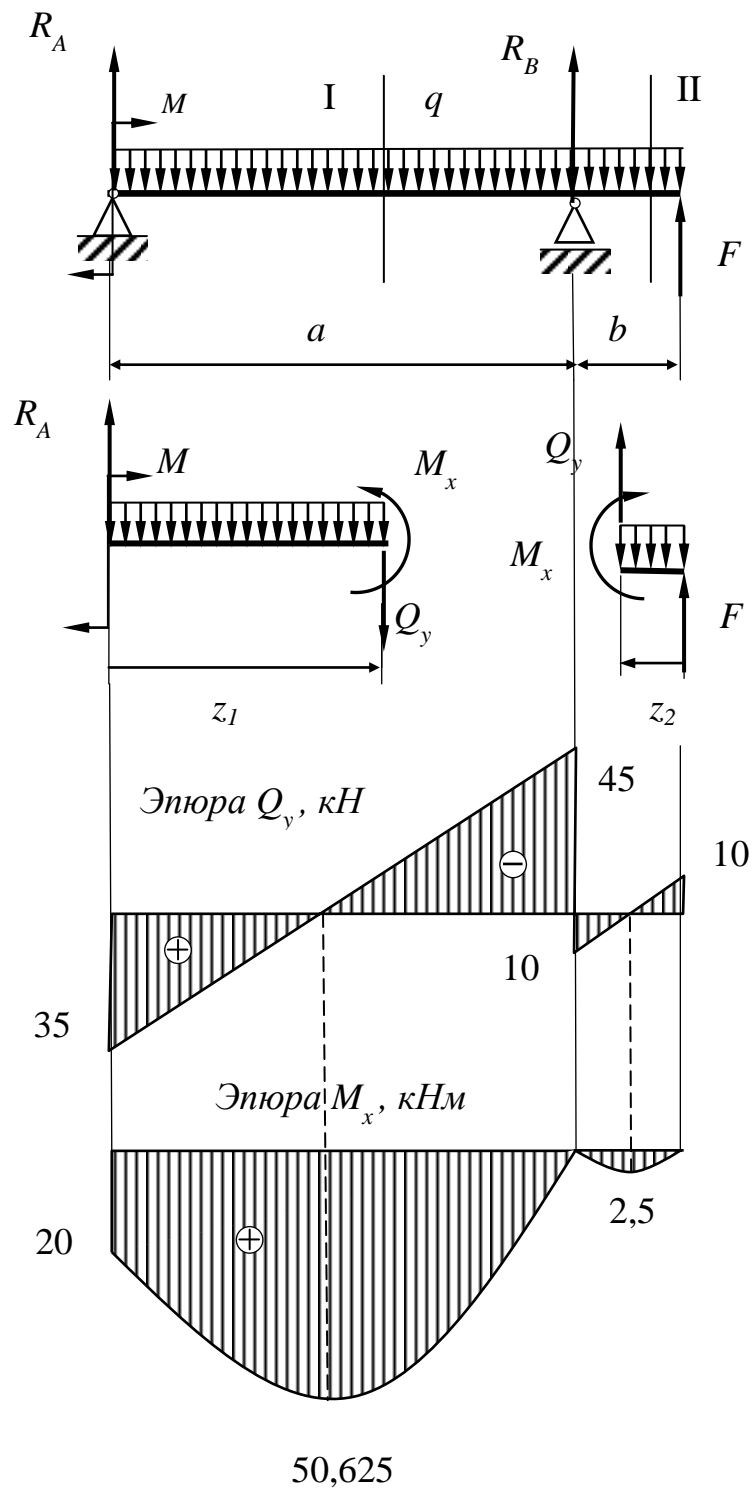


Рис.4.7

На балке можно выделить два грузовых участка. Проводим сечение I в пределах первого грузового участка – на расстоянии z_1 ($0 \leq z_1 \leq a=4$ м) от левого конца балки, рассматриваем левую отсеченную часть. Показываем в проведенном сечении внутренние усилия, положительные согласно правилу знаков; составляем уравнения равновесия.

Сумма проекций на вертикальную ось OY:

$$\sum_i Y_i = 0; -R_A + qz_1 + Q_y = 0, \Rightarrow Q_y = R_A - qz_1$$

Для построения линейной функции вычисляем ее значение в начале и конце рассматриваемого грузового участка:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad Q_y = R_A = 35 \text{ кН}; \quad \text{при } z_1 = a = 4 \text{ м} \quad Q_y = 35 - 20 \cdot 4 = -45 \text{ кН}.$$

Определяем абсциссу сечения, в котором поперечная сила равна нулю:

$$Q_y = R_A - qz_1^* = 0 \Rightarrow z_1^* = \frac{R_A}{q} = \frac{35}{20} = 1,75 \text{ м}$$

Сумма моментов относительно проведенного сечения I:

$$\sum_i M_x^i = 0; M_x + qz_1 \cdot \frac{z_1}{2} - R_A \cdot z_1 - M = 0 \Rightarrow M_x = M + R_A \cdot z_1 - q \cdot \frac{z_1^2}{2}$$

Для построения параболы выбираем три точки: начало, конец рассматриваемого промежутка, сечение, в котором поперечная сила обращается в ноль. Тогда: при $z_1 = 0$ $M_x = M = 20 \text{ кНм}$; при $z_1 = a = 4 \text{ м}$ $M_x = 20 + 35 \cdot 4 - 20 \cdot 4^2 / 2 = 0$; при $z_1^* = 1,75 \text{ м}$ $M_x = 20 + 35 \cdot 1,75 - 20 \cdot 1,75^2 / 2 = 50,625 \text{ кНм}$.

Проводим сечение II в пределах второго грузового участка – на расстоянии z_2 ($0 \leq z_2 \leq b=1$ м) от правого конца балки, рассматриваем правую отсеченную часть. Показываем в проведенном сечении внутренние усилия, положительные согласно правилу знаков; составляем уравнения равновесия.

Сумма проекций на вертикальную ось OY:

$$\sum_i Y_i = 0; -F + qz_1 - Q_y = 0, \Rightarrow Q_y = qz_1 - F$$

Для построения линейной функции вычисляем ее значение в начале и конце рассматриваемого грузового участка:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad Q_y = -F = -10 \text{ кН}; \quad \text{при } z_1 = b = 1 \text{ м} \quad Q_y = 20 \cdot 1 - 10 = 10 \text{ кН}.$$

Определяем абсциссу сечения, в котором поперечная сила равна нулю:

$$Q_y = qz_1^* - F = 0 \Rightarrow z_1^* = \frac{F}{q} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ м}$$

Сумма моментов относительно проведенного сечения II:

$$\sum_i M_x^i = 0; M_x + q \cdot \frac{z_2^2}{2} - F \cdot z_2 = 0 \Rightarrow M_x = F \cdot z_2 - q \cdot \frac{z_2^2}{2}$$

Для построения параболы выбираем три точки: начало, конец рассматриваемого промежутка, сечение, в котором поперечная сила обращается в ноль. Тогда: при $z_2 = 0$ $M_x = 0$; при $z_2 = b = 1$ м

$$M_x = 10 \cdot 1 - 20 \cdot 1^2 / 2 = 0; \text{ при } z_1^* = 0,5 \text{ м } M_x = 10 \cdot 0,5 - 20 \cdot 0,5^2 / 2 = 2,5 \text{ кНм.}$$

По полученным выражениям для M_x и Q_y в масштабе строятся эпюры внутренних усилий (рис.4.7).

4.2 Определение напряжений и подбор сечений.

Нормальные напряжения в поперечном сечении балки при плоском изгибе определяются по формуле

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y,$$

где M_x - изгибающий момент в сечении балки;

J_x - осевой момент инерции сечения балки.

Прочность балки, работающей на изгиб, проверяется, как правило, по наибольшему нормальному напряжению. Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} \leq [\sigma]$$

где $[\sigma]$ - допускаемое нормальное напряжение,

W_x - осевой момент сопротивления сечения балки.

Касательные напряжения при изгибе балки вычисляются по формуле

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^{omc}}{J_x \cdot b(y)}$$

где Q_y - поперечная сила в рассматриваемом сечении балки;

$b(y)$ - ширина поперечного сечения балки на том уровне, где определяются касательные напряжения;

S_x^{omc} - статический момент относительно нейтральной оси части площади поперечного сечения, расположенной выше или ниже точки, в которой подсчитывается касательное напряжение .

Условие прочности при изгибе балки по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{|Q_y|_{\max} \cdot S_x^{\max}}{J_x \cdot b(y)} \leq [\tau].$$

Пример 4.4.

Подобрать поперечное сечение в форме двутавра для балки, рассмотренной в примере 4.3. Проверить прочность балки по касательным напряжениям.

Решение.

Из условия прочности по нормальным напряжениям получаем формулу для подбора поперечного сечения балки:

$$W_x \geq \frac{|M_x|_{\max}}{[\sigma]}.$$

Значение максимального по модулю изгибающего момента находим по эпюре изгибающего момента (рис. 4.7):

$$|M_x|_{\max} = 50,625 \text{ кНм}$$

Допускаемое напряжение для материала двутавра (сталь) - $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Получаем

$$W_x \geq \frac{50,625 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,316 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 316 \text{ см}^3.$$

По сортаменту "Сталь горячекатаная. Балки двутавровые" выбираем двутавр №27, для которого момент сопротивления $W_x = 371 \text{ см}^3$; момент инерции $J_x = 5010 \text{ см}^4$; толщина стенки двутавра $d = 6,0 \text{ мм}$, статический момент полусечения $S_x = 210 \text{ см}^3$.

Проверяем прочность по касательным напряжениям при заданном значении $[\tau] = 80 \text{ МПа}$. По эпюре поперечной силы (рис.4.7) находим

$$|Q_y|_{\max} = 45 \text{ кНм}. \text{ Для двутавра №27 } b(y) = d = 6 \text{ мм}, S_x^{\max} = S_x = 210 \text{ см}^3.$$

Тогда

$$\tau_{\max} = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 210 \cdot 10^{-6}}{5010 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 31,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 31,4 \text{ МПа} \leq [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

Библиографический список

1. *Александров А. В.* Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – 3-е изд., испр. – М. : Высшая школа, 2003. – 560 с. : ил.

2. *Елизаров С. В.* Сопротивление материалов : базовый курс лекций / С. В. Елизаров, Ю. П. Каптелин. – СПб. : Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2007. – 254 с.

3. Сопротивление материалов. Основы теории. Примеры. Задачи : учеб. пособие / С. В. Елизаров, Ю. П. Каптелин, Я. К. Кульгавий, Н. М. Савкин; под общ. ред. С. В. Елизарова. – СПб. : Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2006. – 400 с.

Оглавление

1. ОСЕВАЯ ДЕФОРМАЦИЯ	3
1.1. Определение реакций опор.	3
1.1.1. Ступенчато - призматические стержни.	3
1.1.2. Статически определимые шарнирно - стержневые системы	4
1.1.3. Статически неопределимые шарнирно - стержневые системы	6
1.2. Построение эпюры продольной силы в ступенчато - призматическом стержне.	8
1.3. Подбор поперечных сечений. Определение перемещений.	9
1.3.1. Ступенчато - призматические стержни.	9
1.3.2. Шарнирно-стержневые системы	11
1.4. Расчет статически неопределимых шарнирно - стержневых систем по методу допускаемых нагрузок (пояснения к решению задачи 3, продолжение).	12
2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФИГУР	14
2.1. Основные геометрические характеристики	14
2.2. Формулы перехода к параллельным осям	14
2.3. Моменты инерции простых фигур	15
2.4. Определение центра тяжести	16
2.5. Определение моментов инерции	17
3. КРУЧЕНИЕ ВАЛОВ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ	20
3.1. Построение эпюр крутящего момента	21
3.2. Подбор сечения и определение деформации вала	25
4 ПЛОСКИЙ ИЗГИБ	29
4.1. Построение эпюр внутренних усилий	30
4.2. Определение напряжений и подбор сечений	41
Библиографический список	43