

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

**ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ**

Кафедра «Прочность материалов и конструкций»

**Смирнов В.И., Видюшенков С.А.**

## **ИЗГИБ ПЛАСТИНОК**

**Учебное пособие**

Санкт-Петербург  
2011

УДК 624.073  
С50

**Р е ц е н з е н т ы:**

доктор технических наук, профессор кафедры  
«Соппротивление материалов и теория упругости»  
ФГБОУ ВПО ПИМаш (ЛМЗ-ВТУЗ)  
*Е. В. Соколов;*

кандидат технических наук, доцент кафедры  
«Прочность материалов и конструкций»  
ФГБОУ ВПО ПГУПС  
*И. Б. Поварова*

**Смирнов В. И., Видюшенков С. А.**

Изгиб пластинок: учеб. пособие / В. И. Смирнов, С. А. Видюшенков. –  
СПб.: Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2011. – 51 с.

Приведены основы теории и примеры решения задач по изгибу эллиптических, круглых и прямоугольных пластин. При этом используются как классические аналитические методы решения указанных задач, так и аналитические методы, основанные на применении математического аппарата разрывных функций.

Предназначено для аудиторной и самостоятельной работы студентов всех форм обучения.

УДК 624.073

© Петербургский государственный  
университет путей сообщения, 2011  
© Смирнов В. И., Видюшенков С. А., 2011

## Введение

В соответствии с принятым ФГОС ВПО (2011 г.) по дисциплинам сопротивление материалов, строительная механика сокращается количество часов аудиторных занятий и увеличивается время, отводимое на самостоятельную работу студентов. В связи с этим появилась необходимость в дополнительных методических материалах, позволяющих познакомиться с современными аналитическими методами расчётов таких элементов конструкций, как пластинки.

Данное учебное пособие состоит из двух глав.

В первой главе приведены основы теории и примеры решения задач по изгибу эллиптических, круглых и прямоугольных пластин. Примеры сопровождаются теоретической и методической информацией по решению задач. Кроме того, по каждой теме приведены расчётно-проектировочные задания для самостоятельного решения. Задачи составлены с большим числом вариантов, что обеспечивает индивидуальность исходных данных.

Во второй главе на основе математического аппарата обобщённых функций излагается в доступной форме эффективный аналитический метод расчёта пластин на действие статических нагрузок. Рассматриваются круглые пластинки под действием равномерно распределённой нагрузки, как по всей её поверхности, так и кольцевой поверхности при различных условиях закрепления пластинки.

Учебное пособие предназначено для аудиторной, самостоятельной и научно-исследовательской работы студентов, изучающих сопротивление материалов и строительную механику. Рекомендуется для подготовки к самостоятельному решению задач, выполнению расчётно-проектировочных заданий, к контрольным работам, зачетам и экзаменам в качестве дополнения к теоретическому курсу сопротивления материалов и строительной механики. Оно может быть полезно магистрам, аспирантам и стажерам.

## Глава 1. Изгиб тонких пластинок

### 1.1 Основные понятия и гипотезы

Пластины являются одним из основных конструктивных элементов многих инженерных сооружений. Под *пластиной* понимается тело, у которого одно измерение (высота, толщина) мало по сравнению с двумя другими размерами.

Высота (толщина)  $h$  пластины может быть переменной, при  $h = const$  пластина называется *пластиной постоянной толщины*. Далее рассматриваются именно такие пластины. Плоскость, разделяющая

пополам толщину пластины, называется *срединной плоскостью*. При изгибе пластины она превращается в *срединную поверхность*. *Контуром пластины* называют линию, ограничивающую срединную плоскость пластины.

В прямоугольной системе координат оси  $x$  и  $y$  будем располагать в срединной плоскости пластины, а ось  $z$  – направлять вниз (рис. 1.1). Перемещения срединной поверхности в направлении оси  $z$  называют *прогибом* пластины и обозначают  $w = w(x, y)$ .

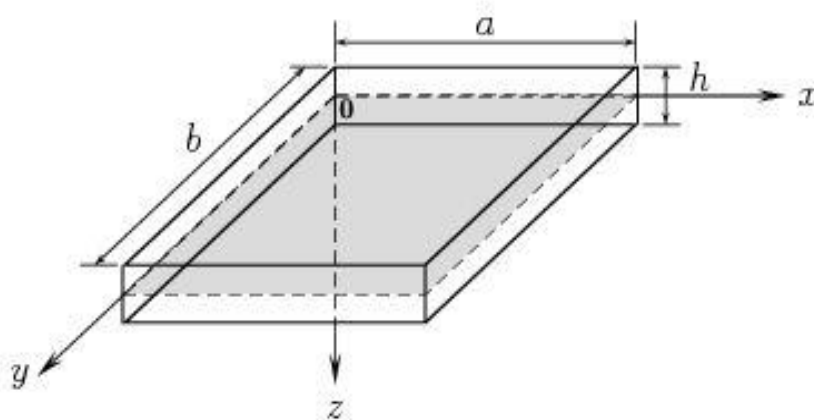


Рис. 1.1. Пластинка: срединный слой и размеры

В зависимости от соотношения наименьшего размера основания  $a$  и толщины  $h$  различают три вида пластин:

- при  $\frac{a}{h} \geq 80 \div 100$  пластины относят к *мембранам*; мембраны обладают незначительной изгибной жёсткостью и работают в основном на растяжение;
- при  $\frac{a}{h} \leq 8 \div 10$  пластина считается *толстой* и часто называется *плитой*: расчёт плит ведётся как для массивных трёхмерных тел;
- при  $8 \div 10 \leq \frac{a}{h} \leq 80 \div 100$  пластины называют тонкими; такой тип пластин чаще всего встречается для в инженерных приложениях. Их расчёт ведётся с некоторыми упрощающими предположениями.

В зависимости от способности деформироваться тонкие пластины делятся на жёсткие и гибкие.

Если наибольший относительный прогиб при изгибе  $w/h \leq 0,2 \dots 0,5$ , то пластина считается *жёсткой* и напряжениями растяжения (сжатия), возникающими в её срединной плоскости пренебрегают. Если величина  $w/h$  превышает указанные пределы, то пластину считают *гибкой*, она работает одновременно и на изгиб и на растяжение (сжатие), то есть как мембрана.

Далее рассматриваются тонкие жёсткие пластинки, работающие на изгиб. Сформулируем некоторые допущения и ограничения (*гипотезы*), благодаря которым расчёт тонких пластин упрощается и сводится к решению линейных дифференциальных уравнений.

1. Основная *гипотеза о прямых нормалях*: прямолинейные отрезки, нормальные (перпендикулярные) к срединной плоскости пластины до деформации, остаются такими же и после деформации. Эта гипотеза аналогична гипотезе плоских сечений (гипотезе Бернулли), принимаемая в сопротивлении материалов при расчёте стержней.

2. *Гипотеза об отсутствии поперечного давления*: слои пластины, параллельные срединной плоскости, не давят друг на друга и поэтому соответствующими нормальными напряжениями сжатия  $\sigma_z$ , которые значительно меньше  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  можно пренебречь.

Эти два допущения часто называют *гипотезами Кирхгофа*.

3. *Гипотеза о вертикальном смещении точек срединной поверхности*: точки срединной поверхности смещаются только в перпендикулярных к ней направлениях, то есть по направлению оси  $z$ . Горизонтальными перемещениями срединной плоскости  $(u_0, v_0)$  в силу их малости пренебрегают.

Вследствие принятых допущений решение задачи по определению напряжённо-деформированного состояния (НДС), то есть по определению внутренних усилий, напряжений и перемещений в сечении пластины значительно упрощается. Задача решается в перемещениях и за основную искомую функцию принимается прогиб  $w = w(x, y)$ , то есть вертикальное перемещение.

## 1.2 Перемещения и деформации в пластине

Будем рассматривать пластинки постоянной толщины, нагруженные поперечной распределённой нагрузкой  $q = q(x, y)$ , которую для краткости далее обозначаем просто  $q$ . Под действием этой нагрузки пластинка прогибается и срединный слой, искривляясь, образует поверхность  $w = w(x, y)$ .

Горизонтальные перемещения точек пластины, не принадлежащие срединной плоскости, в направлении осей  $x$  и  $y$  условимся обозначать  $u$  и  $v$  соответственно. Углы поворота нормали  $mn$  к срединной плоскости по отношению к осям  $x$  и  $y$  (рис. 1.2) будут

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

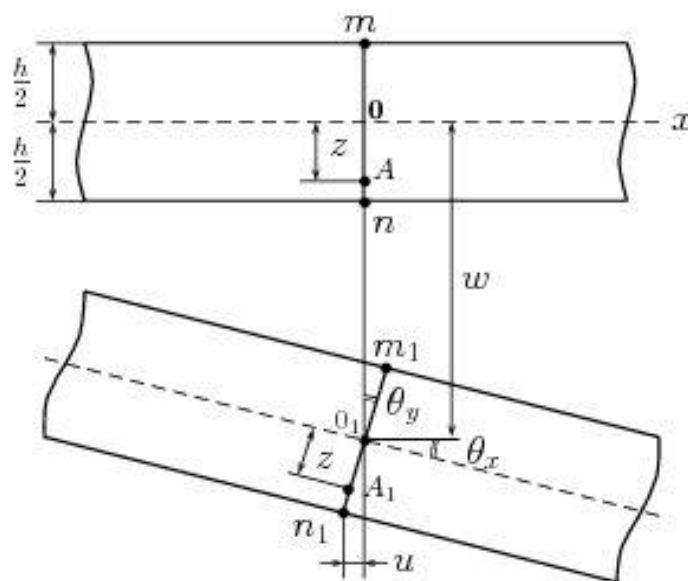


Рис. 1.2. Горизонтальное перемещение

Из рис. 1.2 видно, что перемещение  $u$ , а, следовательно, и перемещение  $v$ , определяются так

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.1)$$

Используя соотношения Коши, связывающие линейные деформации  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ , угловые деформации  $\gamma_{xy}$  и перемещения  $u$  и  $v$  следующим образом:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

получим выражения для деформаций в пластинке

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0.$$

Знак минус означает, что перемещение точки при  $z > 0$  происходит в сторону, противоположную направлениям осей  $x$  и  $y$ .

### 1.3 Напряжения и внутренние усилия в пластине

Согласно закону Гука (с учётом принятого допущения  $\sigma_z = 0$ )

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y),$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x),$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy},$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона материала пластинки. Подставив сюда выражения (1.2), получим

$$\sigma_x = -\frac{E z}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$\sigma_y = -\frac{E z}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E z}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1.3)$$

Из выражений (1.3) следует, что напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  зависят от координаты  $z$  линейно. Можно получить выражения для компонент  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{yz}$ , но они здесь не понадобятся.

В соответствии с условиями статической эквивалентности внутренние моменты, возникающие в пластине, определяются следующими выражениями:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z dz. \quad (1.4)$$

Подставляя формулы для напряжений (1.3) в соотношения (1.4), получим значения моментов, выраженные через прогиб пластинки

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -D (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $M_x$ ,  $M_y$  – изгибающие моменты,  $M_{xy} = M_{yx}$  – крутящие моменты. Величина

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \mu^2)} \quad (1.6)$$

называется *цилиндрической жёсткостью* и является физико-геометрической характеристикой пластинки при изгибе. Цилиндрическая жёсткость пластины при изгибе отличается от обычной изгибной жёсткости балки  $EI$  множителем  $\frac{1}{(1 - \mu^2)} \approx 1,1$ , который учитывает увеличение жёсткости пластинки благодаря возникновению плоского напряжённого состояния при цилиндрическом изгибе в отличие от линейного напряжённого состояния волокон обычной балки. Указанное увеличения жёсткости составляет около 10 %.

Поперечные силы выражаются через моменты следующими уравнениями

$$Q_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x}, \quad Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}.$$

Подставляя сюда соотношения (5), получаем значения поперечных сил в зависимости от прогиба пластины

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (1.7)$$

Отметим особенности обозначения внутренних силовых факторов в пластинах, отличные от тех, что были приняты в балках:

$M_x$  – изгибающий момент относительно оси, перпендикулярный к  $Ox$ ;

$M_y$  – изгибающий момент относительно оси, перпендикулярный к  $Oy$ ,

$M_{xy}$  – крутящий момент относительно оси  $x$ , действующий в плоскости,



параллельной оси  $y$ ;  $M_{yx}$  – крутящий момент относительно оси  $y$ , действующий в плоскости, параллельной оси  $x$  (рис. 1.3).

Различие между поперечными силами  $Q_x$  и  $Q_y$  состоит в том, что первая действует на площадке с нормалью, параллельной оси  $x$ , а вторая – на площадке с нормалью, параллельной оси  $y$ .

Кроме того, следует принять во внимание, что изгибающие и крутящие моменты, а также поперечные силы отнесены к единице длины сечений, параллельных плоскостям  $xz$  и  $yz$  (рис. 1.1).

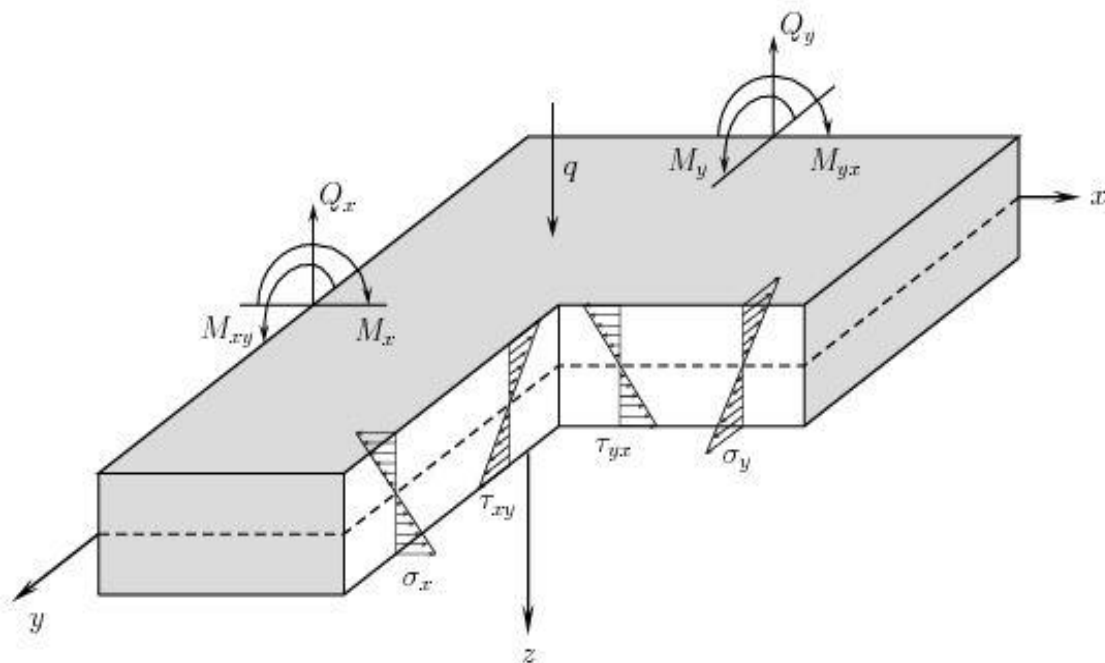


Рис. 1.3. Напряжения и внутренние усилия в пластине

## 1.4 Дифференциальное уравнение изгиба пластины

Если выделить в пластинке элементарный параллелепипед и спроектировать все силы, действующие на него, на ось  $z$ , то из условия равновесия можно получить следующее тождество (выкладки опускаем)

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0,$$

где  $q$  – поперечная нагрузка.

Подставляя сюда выражения для поперечных сил (1.7), получим дифференциальное уравнение пластины

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) называют *уравнением Софии Жермен* и записывают короче так:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D} \quad \text{или} \quad \nabla^4 w = \frac{q}{D}, \quad (1.9)$$

где  $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – гармонический дифференциальный оператор ( $\nabla$  – набла) в декартовых координатах (оператор Лапласа).

Расчёт пластинок сводится к интегрированию уравнения (1.9) при заданной правой части (нагрузке) и определённых граничных условиях.

## 1.5 Граничные условия

Задача интегрирования уравнения (1.9) заключается не только в том, чтобы найти функцию  $w = w(x, y)$ , подстановка которой в дифференциальное уравнение (1.9) удовлетворяла бы последнее уравнение тождественно, но так же и в том, чтобы эта функция удовлетворяла условиям на опорном контуре. Наиболее часто встречающимися вариантами закрепления контура пластинки являются следующие (на примере прямоугольной пластины, рис. 1.1):

1) **З а щ е м л ё н н ы й к р а й.**

Защемление боковой грани пластинки (при  $x = 0$ ) означает отсутствие любых смещений, – горизонтальных, вертикальных и угловых, а значит, и углов поворота  $\theta_z$ . Поэтому

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (1.10)$$

2) **Ш а р н и р н о – о п ё р т ы й к р а й.**

Шарнирно-опёртая грань пластины  $x = 0$  не смещается в вертикальной плоскости, но может перемещаться в горизонтальной и поворачиваться. Это означает отсутствие прогиба и изгибающего момента на этой грани:

$$w|_{x=0} = 0, \quad M_x|_{x=0} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0} = 0.$$

В силу первого равенства, на всём контуре  $x = 0$  обращается в нуль также и производные, поэтому граничные условия упрощаются и для шарнирно-опёртого края будут

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{x=0} = 0. \quad (1.11)$$

3) С в о б о д н ы й к р а й (отсутствие опорных связей).

Кирхгофом было показано, что для определения прогиба  $w$ , удовлетворяющего уравнению (8), достаточно два условия на свободной грани  $x = 0$ :

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \Big|_{x=0} = 0. \quad (1.12)$$

Если на свободном крае пластинки приложены внешний изгибающий момент  $M$  или распределённая нагрузка  $q$ , то в правые части равенств (1.12) надо подставить соответственно  $M$  и  $q$ .

В случае пластины с криволинейным контуром вводится система координат, связанная с нормалью  $n$  и касательной  $s$  к контуру пластины, и граничные условия переписываются через прежние прямоугольные координаты.

Ниже рассматриваются эллиптические пластинки с первым граничным условием, то есть жёсткой заделкой и круглые пластики с различными закреплениями.

## 1.6 Эллиптическая пластинка

Рассмотрим эллиптическую пластинку, *защемлённую по контуру* и нагруженную равномерно распределённой нагрузкой интенсивности  $q$  (рис. 1.4). Оси  $Ox$  и  $Oy$  выберем так, чтобы они проходили через центр пластинки. Тогда уравнение контура

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

где  $a$  и  $b$  – большая и малая полуоси эллипса. Граничным условиям (1.10) будет удовлетворять функция (прогиб)

$$w = w_0 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2. \quad (1.13)$$

Это выражение и его первые производные по  $x$  и  $y$  обращаются на контуре в нуль. При  $x = y = 0$  выражение превращается в  $w_0$ , что является прогибом в центре пластинки. Эту величину найдем, подставив решение (1.13) в уравнение (1.8).

После дифференцирования находим

$$w_0 = \frac{q}{D \left( \frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)}. \quad (1.14)$$

Выражения для изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$  и крутящего момента  $M_{xy}$  найдём, подставив выражение для прогиба (1.13) в формулы (1.5):

$$\begin{aligned} M_x(x, y) &= -4w_0 D \left[ \frac{1}{a^2} \left( \frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{\mu}{b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1 \right) \right]; \\ M_y(x, y) &= -4w_0 D \left[ \frac{1}{b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{\mu}{a^2} \left( \frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right]; \\ M_{xy}(x, y) &= -\frac{8 w_0 D}{a^2 b^2} (1 - \mu) x y. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Выделим значения моментов в характерных точках:

– на концах большой полуоси ( $x = \pm a$ ,  $y = 0$ )

$$M_x = -\frac{8 w_0 D}{a^2}, \quad M_y = -\frac{8 \mu w_0 D}{a^2}, \quad M_{xy} = 0; \quad (1.16)$$

– на концах малой полуоси ( $x = 0$ ,  $y = \pm b$ )

$$M_x = -\frac{8 \mu w_0 D}{b^2}, \quad M_y = -\frac{8 w_0 D}{b^2}, \quad M_{xy} = 0; \quad (1.17)$$

– в центре пластинки ( $x = y = 0$ )

$$M_x = 4w_0 D \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\mu}{b^2} \right), \quad M_y = 4w_0 D \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\mu}{a^2} \right), \quad M_{xy} = 0. \quad (1.18)$$

Так как зависимость изгибающих моментов от координат имеет вид параболической функции, то для построения эпюр  $M_x$  и  $M_y$  необходимо взять минимум три точки.

Аналогичным образом найдём выражения для поперечных сил вдоль координатных осей, подставив функцию прогиба (1.13) в формулы (1.7):

$$\begin{aligned} Q_x(x) &= -\frac{8 w_0 D}{a^4 b^2} (3b^2 + a^2) x, \\ Q_y(y) &= -\frac{8 w_0 D}{a^2 b^4} (3a^2 + b^2) y. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В центре пластинки ( $x = y = 0$ ) всегда  $Q_x = Q_y = 0$ .

Наконец, подставляя  $w = w(x, y)$  из выражения (1.13) в формулы (1.3), вычислим напряжения в пластине:

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= -\frac{4 E w_0 z}{1 - \mu^2} \left[ \frac{1}{a^2} \left( \frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{\mu}{b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1 \right) \right]; \\ \sigma_y(x, y) &= -\frac{4 E w_0 z}{1 - \mu^2} \left[ \frac{1}{b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{\mu}{a^2} \left( \frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right]; \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{8 E w_0 z}{1 + \mu} \frac{x y}{a^2 b^2}.\end{aligned}\quad (1.20)$$

Напряжения в центре пластинки ( $x = y = 0$ )

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{4 E w_0 z}{1 - \mu^2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\mu}{b^2} \right), \\ \sigma_y &= \frac{4 E w_0 z}{1 - \mu^2} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\mu}{a^2} \right), \\ \tau_{xy} &= 0.\end{aligned}\quad (1.21)$$

**Пример расчёта.** Рассмотрим эллиптическую пластинку, защемлённую по контуру и нагруженную равномерно распределённым давлением интенсивности  $q$ .

**Дано:** давление  $q = 25 \text{ МПа}$ , размер пластины  $a = 1,5 \text{ м}$ ,  $b = 1 \text{ м}$ , толщина  $h = 0,2 \text{ м}$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0,35$ , модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , допускаемое напряжение на сдвиг  $[\tau] = 80 \text{ МПа}$  (материал – сталь).

**Требуется:**

1. Определить наибольший прогиб пластины (в её середине).
2. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов по направлению главных диаметров контура.
3. В точке  $C$  с координатами  $(a/2, b/2)$  определить главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_3$  и выполнить проверку на прочность по III теории:  $|\tau_{\max}| = [\tau]$ .

## РЕШЕНИЕ

Жёсткость заданной пластинки, согласно выражению (1.6)

$$D = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,2^3}{12 (1 - 0,35^2)} = 151,947 \text{ МНм}.$$

1) Прогиб в центре пластины (формула (1.14))

$$w_0 = \frac{25}{151,947 \left( \frac{24}{1,5^4} + \frac{16}{1,5^2 \cdot 1^2} + \frac{24}{1^4} \right)} = 4,589 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

2) Величины поперечных сил  $Q_x$ ,  $Q_y$  вдоль главных диаметров, совпадающих с направлениями координатных осей, определяем по формулам (1.19), а величины изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$  – по формулам (1.15), полагая для  $M_x$ :  $y = 0$ , а для  $M_y$ :  $x = 0$ .

Результаты вычислений с шагом  $0,25 \text{ м}$  сводим в табл. 1.1.

Эпюры внутренних усилий  $Q_x(x, 0)$ ,  $Q_y(0, y)$ ,  $M_x(x, 0)$  и  $M_y(0, y)$  приведены на рис. 1.4.

Т а б л и ц а 1.1

Величины поперечных сил и изгибающих моментов, возникающих в эллиптической пластине

Усилие Координата, ( $x, y$ ), $м$	$Q_x(x, 0),$ $МН/м$	$Q_y(0, y),$ $МН/м$	$M_x(x, 0),$ $МНм / м$	$M_y(0, y),$ $МНм / м$
-1,5	8,678	-	-2,479	-
-1,25	7,231	-	-1,045	-
-1,00	5,785	19,215	0,129	-5,579
-0,75	4,339	14,411	1,042	-1,728
-0,50	2,893	9,607	1,694	1,023
-0,25	1,446	4,804	2,085	2,673
0	0	0	2,216	3,223
0,25	-1,446	-4,804	2,085	2,678
0,50	-2,893	-9,607	1,694	1,023
0,75	-4,339	-14,411	1,042	-1,728
1,00	-5,785	-19,215	0,129	-5,579
1,25	-7,231	-	-1,045	-
1,50	-8,678	-	-2,479	-

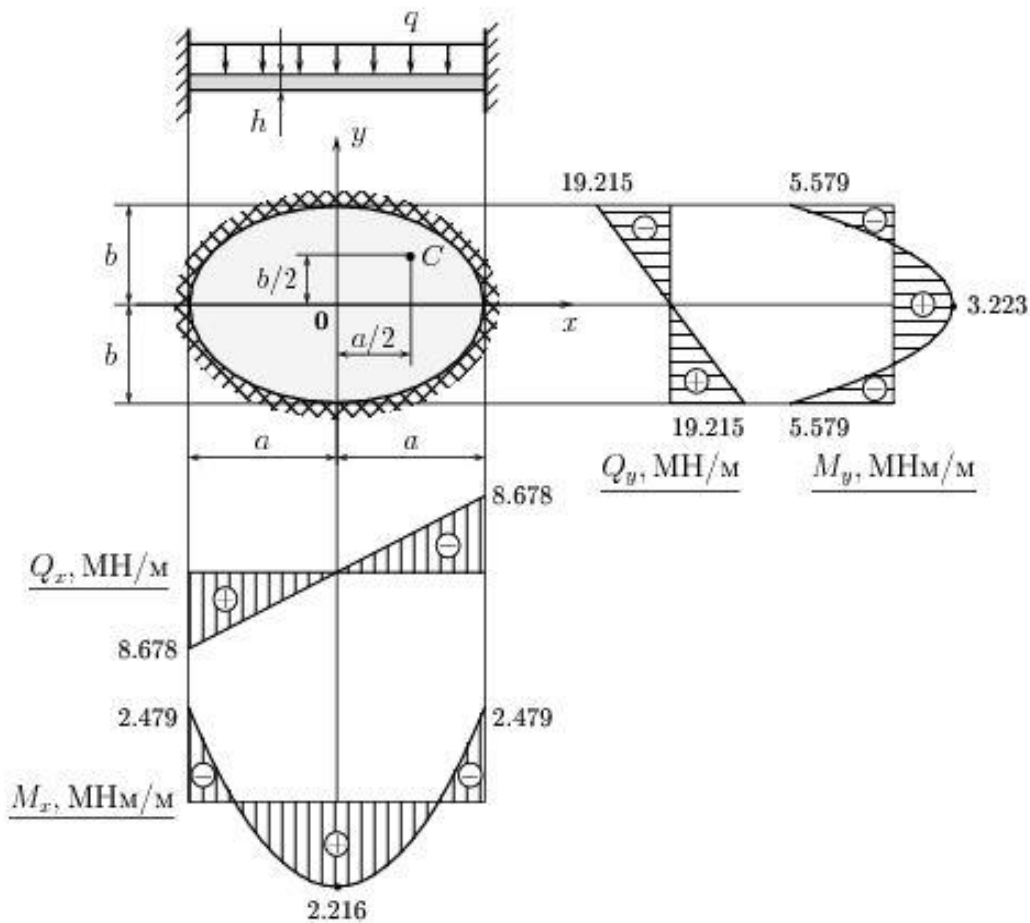


Рис. 1.4. Эпюры внутренних усилий в эллиптической пластинке

3) Главные напряжения при плоском напряженном состоянии определяются по формуле

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad (1.22)$$

где  $\sigma_1 > \sigma_3$ ,  $\sigma_2 = 0$ .

Для точки  $C$  ( $a/2$ ,  $b/2$ ) выражения

$$\frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1$$

обращаются в нуль. Поэтому, согласно выражениям (1.20), нормальные напряжения в точке  $C$  отсутствуют ( $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ), то есть материал в данной точке находится в состоянии *чистого сдвига*. Следовательно,

$$\sigma_{1,3} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 \tau_{xy}^2} = \pm \tau_{xy}.$$

Окончательно индексацию главных напряжений производим с учётом условия  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ :

$$\sigma_1 = +\tau_{xy}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau_{xy}.$$

Определяем максимальное касательное напряжение по формуле

$$\tau_{\max} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right|,$$

откуда получаем

$$\tau_{\max} = |\tau_{xy}|.$$

Наибольшее касательное напряжение в эллиптической пластине возникает на её поверхности  $z = \pm h/2$ .

Подставляя исходные данные в третью формулу (1.20) при

$$x = \frac{a}{2} = 0,75 \text{ м}, \quad y = \frac{b}{2} = 0,5 \text{ м}, \quad z = \pm \frac{h}{2} = \pm 0,1 \text{ м},$$

находим:  $|\tau_{\max}| = 90,651 \text{ МПа} > [\tau] = 80 \text{ МПа}$ .

Таким образом, прочность пластины в точке  $C$  не обеспечивается. Необходимо либо уменьшить нагрузку, либо увеличить размеры пластины, или и то и другое одновременно.

## 1.7 Круглая пластинка

При определении напряжённо-деформированного состояния (НДС) круглых пластин удобно пользоваться полярными координатами  $(r, \varphi)$ , которые связаны с прямоугольными следующими соотношениями:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x},$$

а вторая производная по координате  $y$  преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial^2(\dots)}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\dots)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\dots)}{\partial \varphi^2}.$$

Дифференциальное уравнение изгиба круглой пластинки (1.9) запишем в виде

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{q(r, \varphi)}{D}. \quad (1.23)$$



Поскольку круглая пластинка замкнута в окружном направлении, то в силу периодичности по углу  $\varphi$  всех функций, определяющих НДС пластинки, её прогиб можно представить в такой форме:

$$w(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(r) \cos m\varphi,$$

где  $m$  – параметр, определяющий тип деформации ( $m = 0$  соответствует осесимметричной деформации;  $m = 1$  – соответствует кососимметричной деформации;  $m = nk$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) – соответствует циклически симметричным деформациям). Таким образом, в исходном расчётном дифференциальном уравнении (1.23) можно избавиться от производных по окружной координате  $\varphi$ .

В случае *осесимметричного нагружения* пластинки (далее рассматриваются только такие задачи) равномерно распределённой нагрузкой  $q = \text{const}$ , что соответствует осесимметричной деформации пластинки, это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{q}{D}. \quad (1.24)$$

Вид решения уравнения (1.24) зависит от условия закрепления пластинки. Как и в случае эллиптической пластинки, здесь так же будем рассматривать вариант *заделки (жёсткое защемление)* контура ( $a$  – радиус пластинки):

$$w|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=a} = 0.$$

В этом случае ( $q = \text{const}$ , край пластинки заделан) решением уравнения (1.24) будет

$$w = \frac{q}{64 D} (a^2 - r^2), \quad (1.25)$$

что легко проверить непосредственной подстановкой в соотношение (1.24).

Угол поворота сечения

$$\theta = -\frac{q}{16 D} (a^2 - r^2) r. \quad (1.26)$$

Внутренние усилия в пластинке в случае осевой симметрии выражаются через прогиб следующим образом:

$$M_r = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right),$$

$$M_{\varphi} = -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right),$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right),$$

где  $M_r$  и  $M_{\varphi}$  – изгибающие моменты, возникающие в радиальном и в окружном направлениях пластинки соответственно,  $Q_r$  – радиальная перерезывающая сила.

Подставляя сюда значения (1.25), получаем

$$M_r = \frac{q}{16} \left[ (1 + \mu) a^2 - (3 + \mu) r^2 \right],$$

$$M_{\varphi} = \frac{q}{16} \left[ (1 + \mu) a^2 - (1 + 3\mu) r^2 \right],$$

$$Q_r = -\frac{q}{2} r. \quad (1.27)$$

В центре пластинки ( $r = 0$ )

$$M_r = M_{\varphi} = \frac{(1 + \mu) q a^2}{16}, \quad (1.28)$$

на контуре ( $r = a$ )

$$M_r = -\frac{q a^2}{8}, \quad M_{\varphi} = -\frac{\mu q a^2}{8}. \quad (1.29)$$

Нормальные напряжения в пластинке вычисляются по формулам:

$$\sigma_r = -\frac{E z}{1 - \mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right),$$

$$\sigma_{\varphi} = -\frac{E z}{1 - \mu^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right),$$

где  $\sigma_r$ ,  $\sigma_{\varphi}$  – радиальное и окружное напряжения.

Подставляя сюда функцию прогиба (1.25), получаем

$$\sigma_r = \frac{E q z}{16 D (1 - \mu^2)} \left[ (1 + \mu) a^2 - (3 + \mu) r^2 \right],$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{E q z}{16 D (1 - \mu^2)} \left[ (1 + \mu) a^2 - (1 + 3\mu) r^2 \right]. \quad (1.30)$$

В центре пластинки ( $r = 0$ )

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{3 qa^2 z}{4 h^3}, \quad (1.31)$$

на контуре ( $r = a$ )

$$\sigma_r = -\frac{3 qa^2 z}{2 h^3}, \quad \sigma_\varphi = -\frac{3\mu qa^2 z}{2 h^3}. \quad (1.32)$$

**Пример расчёта.** Рассмотрим круглую пластинку радиуса  $a$ , защемлённую по контуру и нагруженную равномерно распределённым давлением интенсивности  $q$ .

**Дано:** давление  $q = 2 \text{ МПа}$ , радиус пластины  $a = 0,2 \text{ м}$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ , модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$  (материал – сталь).

**Требуется:**

1. Построить эпюры изгибающих моментов в радиальном и окружном направлениях  $M_r$  и  $M_\varphi$ .
2. Определить необходимую толщину  $h$  пластины.
3. Вычислить максимальный прогиб пластины.

#### РЕШЕНИЕ

1) Эпюры радиального  $M_r$  и окружного  $M_\varphi$  изгибающих моментов определены по формулам (1.27) и приведены на рис. 1.5.

2) Условие прочности по третьей теории

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (1.33)$$

Нормальные напряжения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$  являются *главными*, однако согласно принятому допущению напряжение  $\sigma_2 = \sigma_z = 0$  (напряжённое состояние плоское). Поэтому, с учётом правила индексации главных напряжений

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

принимая в соответствии с формулой (32):

$$\sigma_1 = \sigma_r, \quad \sigma_3 = \sigma_\varphi.$$

Разность  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  достигает максимума на контуре пластинки ( $r = a$ ), в то время как в центре пластинки она равна нулю (формула (1.31)). Таким образом, опасная точка будет возле заделки ( $r = a$ ).

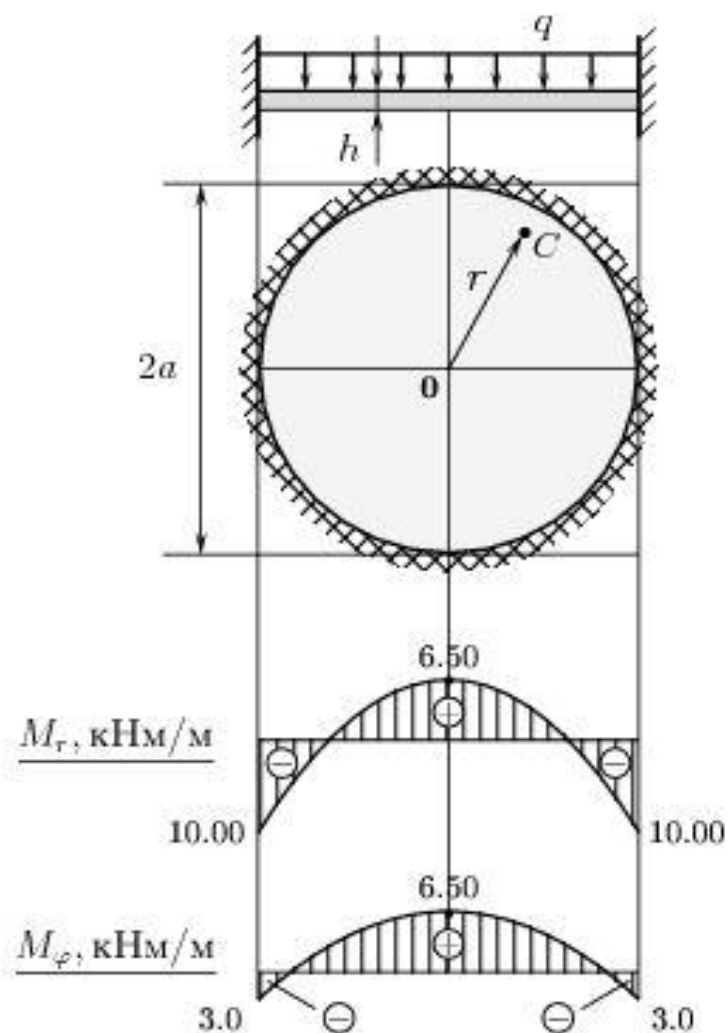


Рис. 1.5. Эпюры изгибающих моментов в круглой пластинке

Принимая в этой точке  $z = -h/2$ , то есть верхнюю грань пластинки, по формулам (1.31) имеем

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_r - \sigma_\varphi)|_{r=a} = \frac{3(1-\mu)qa^2}{4h^2} \leq [\sigma],$$

откуда находим необходимую толщину пластинки

$$h \geq \sqrt{\frac{3(1-\mu)qa^2}{4[\sigma]}} = \sqrt{\frac{3(1-0,3) \cdot 2 \cdot 0,2^2}{4 \cdot 160}} = 0,016 \text{ м} = 1,6 \text{ см}.$$

3) Определим максимальный прогиб пластины.

Согласно уравнению (1.25) он достигается в центре пластины ( $r = 0$ ). Предварительно находим цилиндрическую жёсткость по формуле (1.6)

$$D = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,016^3}{12 (1 - 0,3^2)} = 0,075 \text{ МН} \cdot \text{м}.$$

Тогда

$$w_{\max} = w(0) = \frac{q a^4}{64 D} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0,2^4}{64 \cdot 0,075 \cdot 10^6} = 6,667 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx 0,67 \text{ мм}. \quad (1.34)$$

## 1.8 Прямоугольная пластинка

Для прямоугольной пластинки, все грани которой являются шарнирно опёртыми, решение уравнения (1.8), предложенное Л. Надаи, можно представить в виде двойного тригонометрического ряда

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}, \quad (1.35)$$

где  $a$  и  $b$  – стороны прямоугольной пластины (рис. 1);  $A_{mn}$  – коэффициенты разложения прогиба в двойной ряд Фурье, подлежащие определению (постоянные числа);  $m$  и  $n$  – целые положительные числа: 1, 2, 3, ... .

Внешняя поверхностная нагрузка  $q(x, y)$  также раскладывается в двойной тригонометрический ряд

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}, \quad (1.36)$$

где коэффициенты разложения  $q_{mn}$  определяются из выражения

$$q_{mn} = \frac{4}{a b} \int_0^b \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} dx dy. \quad (1.37)$$

Если соотношения (1.35) и (1.36) подставить в уравнение (1.8), приравнять соответствующие коэффициенты и решить полученное равенство, то получим

$$A_{mn} = \frac{q_{mn}}{\pi^4 D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots). \quad (1.38)$$

Определив коэффициенты по формуле (1.38) и прогиб пластины по формуле (1.35), можно найти внутренние усилия по формулам (1.5) – (1.7). Для равномерно распределённой нагрузки  $q(x, y) = q_0 = \text{const}$  имеем:

– прогиб пластинки

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}; \quad (1.39)$$

– прогиб в центре (максимальный)

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = w_{\max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}; \quad (1.40)$$

– изгибающие моменты

$$M_x(x, y) = \frac{16q_0 a^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 + \mu n^2 \gamma^2}{mn (m^2 + n^2 \gamma^2)} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$M_y(x, y) = \frac{16q_0 a^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu m^2 + n^2 \gamma^2}{mn (m^2 + n^2 \gamma^2)} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad (1.41)$$

– крутящий момент

$$M_{xy}(x, y) = -\frac{16q_0(1-\mu)}{\pi^4 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}; \quad (1.42)$$

– поперечные силы

$$Q_x(x, y) = \frac{16q_0 a}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{n \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)},$$

$$Q_y(x, y) = \frac{16q_0 b}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{m \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}; \quad (1.43)$$

– нормальные напряжения

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z, \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I} z; \quad (1.44)$$

– касательные напряжения

$$\tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I} z, \quad \tau_{zx} = \frac{Q_x S_x}{I}, \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y S_y}{I}. \quad (1.45)$$

В формулах (1.38) – (1.45)  $m=1, 3, 5 \dots$  и  $n=1, 3, 5 \dots$ ;  $\gamma = a/b$ ;  $I = h^3/12$  – погонный момент инерции, имеющий размерность метр в кубе. Моменты  $M_x, M_y, M_{xy}$  имеют размерность силы,  $H \cdot м/м$ ; размерность  $Q_x, Q_y$  – сила, отнесённая к единице длины (погонная поперечная сила),  $H/м$ . Статические моменты площади  $S_x$  и  $S_y$  относительно осей  $x$  и  $y$  берутся для той части сечения пластинки, которая расположена выше горизонта, на уровне которого вычисляются касательные напряжения так же. Эти величины также отнесены к единице длины.

**Пример расчёта.** Требуется определить необходимую толщину пластинки размером  $a = 105 \text{ см}$ ,  $b = 70 \text{ см}$ , нагруженную равномерно распределённой нагрузкой  $q_0 = 1 \text{ МПа}$ . Материал пластины – сталь с механическими свойствами: коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ ; допустимое напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

Расчёт выполнить для центра пластинки ( $x = a/2, y = b/2$ ).

Использовать первую теорию прочности:

$$\max(\sigma_1, \sigma_3) \leq [\sigma].$$

### РЕШЕНИЕ

В центре пластинки  $M_{xy} = \tau_{xy} = 0$ , а выражения для изгибающих моментов принимают вид

$$M_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{16q_0 a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 + \mu n^2 \gamma^2}{mn(m^2 + n^2 \gamma^2)} (-1)^{\frac{m+n}{2}-1}, \quad (1.46)$$

$$M_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{16q_0 a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu m^2 + n^2 \gamma^2}{mn(m^2 + n^2 \gamma^2)} (-1)^{\frac{m+n}{2}-1}. \quad (1.47)$$

Подставляя значения, вычисленные по формулам (1.46) и (1.47), последовательно в выражения (1.44) и (1.22) можно получить, что толщина пластины определяется из условия:

$$h \geq \max \left( \sqrt{6 M_x / [\sigma]}, \sqrt{6 M_y / [\sigma]} \right). \quad (1.48)$$

Таким образом, необходимо вычислить изгибающие моменты по формулам (1.46) и (1.47). Ограничимся первыми тремя членами ряда, то есть  $m, n = 1, 3, 5$  (чем больше членов ряда, тем выше точность).

Предварительно вычислим коэффициенты

$$k = \frac{16 q_0 a^2}{\pi^4} = \frac{16 \cdot 1 \cdot 1,05^2}{\pi^4} = 0,1815 \text{ МН} \cdot \text{м/м}, \quad \gamma = \frac{a}{b} = \frac{105}{70} = 1,5.$$

Далее, последовательно находим

- при  $m = 1, n = 1$

$$M_{x1} = k \frac{1 + 0,3 \cdot 1 \cdot 1,5^2}{1 \cdot 1 \cdot (1 + 1 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{1+1}{2}-1} = 0,159k,$$

$$M_{y1} = k \frac{0,3 \cdot 1 + 1 \cdot 1,5^2}{1 \cdot 1 \cdot (1 + 1 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{1+1}{2}-1} = 0,241k,$$

- при  $m = 3, n = 1$

$$M_{x2} = k \frac{3^2 + 0,3 \cdot 1 \cdot 1,5^2}{3 \cdot 1 \cdot (3^2 + 1 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{3+1}{2}-1} = -0,025k,$$

$$M_{y2} = k \frac{0,3 \cdot 3^2 + 1 \cdot 1,5^2}{3 \cdot 1 \cdot (3^2 + 1 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{3+1}{2}-1} = -0,013k,$$

- при  $m = 5, n = 1$

$$M_{x3} = k \frac{5^2 + 0,3 \cdot 1 \cdot 1,5^2}{5 \cdot 1 \cdot (5^2 + 1 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{5+1}{2}-1} = 0,007k,$$

$$M_{y3} = k \frac{0,3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 1,5^2}{5 \cdot 1 \cdot (5^2 + 1 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{5+1}{2}-1} = -0,003k,$$

- при  $m = 1, n = 3$

$$M_{x4} = k \frac{1 + 0,3 \cdot 3^2 \cdot 1,5^2}{1 \cdot 3 \cdot (1 + 3^2 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{1+3}{2}-1} = -0,005k,$$



$$M_{y4} = k \frac{0,3 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1,5^2}{1 \cdot 3 \cdot (1 + 3^2 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{1+3}{2}-1} = -0,015k,$$

- при  $m = 1, n = 5$

$$M_{x5} = k \frac{1 + 0,3 \cdot 5^2 \cdot 1,5^2}{1 \cdot 5 \cdot (1 + 5^2 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{1+5}{2}-1} = -0,001k,$$

$$M_{y5} = k \frac{0,3 \cdot 1 + 5^2 \cdot 1,5^2}{1 \cdot 5 \cdot (1 + 5^2 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{1+5}{2}-1} = 0,003k,$$

- при  $m = 3, n = 3$

$$M_{x6} = k \frac{3^2 + 0,3 \cdot 3^2 \cdot 1,5^2}{3 \cdot 3 \cdot (3^2 + 3^2 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{3+3}{2}-1} = 0,002k,$$

$$M_{y6} = k \frac{0,3 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 1,5^2}{3 \cdot 3 \cdot (3^2 + 3^2 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{3+3}{2}-1} = 0,003k,$$

- при  $m = 3, n = 5$

$$M_{x7} = k \frac{3^2 + 0,3 \cdot 5^2 \cdot 1,5^2}{3 \cdot 5 \cdot (3^2 + 5^2 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{3+5}{2}-1} = -0,0004k,$$

$$M_{y7} = k \frac{0,3 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 1,5^2}{3 \cdot 5 \cdot (3^2 + 5^2 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{3+5}{2}-1} = -0,001k,$$

- при  $m = 5, n = 3$

$$M_{x8} = k \frac{5^2 + 0,3 \cdot 3^2 \cdot 1,5^2}{5 \cdot 3 \cdot (5^2 + 3^2 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{5+3}{2}-1} = -0,001k,$$

$$M_{y8} = k \frac{0,3 \cdot 5^2 + 3^2 \cdot 1,5^2}{5 \cdot 3 \cdot (5^2 + 3^2 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{5+3}{2}-1} = -0,001k,$$

- при  $m = 5, n = 5$

$$M_{x9} = k \frac{5^2 + 0,3 \cdot 5^2 \cdot 1,5^2}{5 \cdot 5 \cdot (5^2 + 5^2 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{5+5}{2}-1} = 0,0003k,$$

$$M_{y9} = k \frac{0,3 \cdot 5^2 + 5^2 \cdot 1,5^2}{5 \cdot 5 \cdot (5^2 + 5^2 \cdot 1,5^2)^2} (-1)^{\frac{5+5}{2}-1} = 0,0004k.$$

Суммируем полученные значения:

$$M_x = k (0,159 - 0,025 + 0,007 - 0,005 + 0,001 + 0,002 - 0,0004 - 0,001 + 0,0003) = 0,025 \text{ МН} \cdot \text{м/м},$$

$$M_y = k (0,241 - 0,013 + 0,003 - 0,015 + 0,003 + 0,003 - 0,001 - 0,001 + 0,0004) = 0,040 \text{ МН} \cdot \text{м/м}.$$

Вычисляем толщину пластины

$$h_x = \sqrt{\frac{6 M_x}{[\sigma]}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 0,025}{160}} = 0,0306 \text{ м} = 3,06 \text{ см},$$

$$h_y = \sqrt{\frac{6 M_y}{[\sigma]}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 0,040}{160}} = 0,0387 \text{ м} = 3,87 \text{ см}.$$

Так как  $h_y > h_x$ , то минимально допустимая толщина пластины

$$h = h_y = 3,87 \text{ см}.$$

## 1.9 Задачи для расчётно-проектировочных работ

При подготовке к выполнению расчётно-проектировочных работ рекомендуется предварительно изучить разделы теории, относящиеся к теме задания. Расчёты ведутся сначала в обычном (буквенном) виде, затем в числа. Схемы и эпюры выполняются карандашом с обязательным соблюдением масштаба. Работа оформляется на листах формата А4 с титульным листом, исходными данными, заголовками к каждому этапу решения.

### 1.9.1 Изгиб эллиптической пластинки

Для эллиптической пластинки постоянной толщины  $h$ , жёстко заделанной по контуру и нагруженной равномерно распределённой нагрузкой  $q$ , необходимо:

1. Определить наибольший прогиб пластины (в её середине).
2. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов по направлению главных диаметров контура.

3. В точке  $C$  с координатами  $(a/2, b/2)$  определить главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_3$  и выполнить проверку на прочность по III теории:  $|\tau_{\max}| = [\tau]$ .

Исходные данные взять из табл. 1.2.

Для стальной пластины принять:  $\mu = 0,35, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, [\tau] = 80 \text{ МПа}$ .

Для пластины из бетона:  $\mu = 0,15, E = 1,5 \cdot 10^4 \text{ МПа}, [\tau] = 4 \text{ МПа}$ .

### 1.9.2 Изгиб круглой пластинки

Для круглой пластинки заданного радиуса  $a$ , жёстко заделанной по контуру и нагруженной равномерно распределённой нагрузкой  $q$ , необходимо:

1. Построить эпюры изгибающих моментов  $M_r$  и  $M_\phi$  по направлению диаметра пластины.

2. Определить необходимую толщину  $h$  пластины.

3. Вычислить максимальный прогиб пластины.

Значения  $a$  и  $q$  принять по формулам:  $a = 0,2 + 0,1 \cdot N, \text{ м}; q = 2,0 + 0,1 \cdot N, \text{ МПа}$ , где  $N$  – номер варианта. Принять  $\mu = 0,25, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, [\sigma] = 160 \text{ МПа}$  (сталь).

### 1.9.3 Изгиб прямоугольной пластинки

Определить необходимую толщину прямоугольной, шарнирно опёртой по всем граням пластинки, размером  $a \times b$  и нагруженной равномерно распределённой нагрузкой  $q_0$ . Расчёт выполнить по первой теории прочности. Исходные данные взять из табл. 1.3.

Т а б л и ц а 1.2

Исходные данные для расчёта эллиптической пластинки

Вариант	$a, м$	$b, м$	$h, м$	$q, МПа$	Материал
1	1,5	1,0	0,05	1,1	сталь
2	1,7	1,1	0,06	1,2	сталь
3	1,9	1,2	0,07	1,3	сталь
4	2,1	1,3	0,08	1,4	сталь
5	2,3	1,4	0,09	1,5	сталь
6	2,5	1,5	0,10	1,6	сталь
7	2,7	1,6	0,11	1,7	сталь
8	2,9	1,7	0,12	1,8	сталь
9	3,1	1,8	0,13	1,9	сталь
10	3,3	1,9	0,14	2,0	сталь
11	3,5	2,0	0,15	2,2	сталь
12	3,7	2,1	0,16	2,4	сталь
13	3,9	2,2	0,17	2,6	сталь
14	4,1	2,3	0,18	2,8	сталь
15	4,3	2,4	0,19	3,0	сталь
16	4,5	2,5	0,20	0,05	бетон
17	4,7	2,6	0,21	0,06	бетон
18	4,9	2,7	0,22	0,07	бетон
19	5,1	2,8	0,23	0,08	бетон
20	5,3	2,9	0,24	0,09	бетон
21	5,5	3,0	0,25	0,10	бетон
22	5,7	3,1	0,26	0,11	бетон
23	5,9	3,2	0,27	0,12	бетон
24	6,1	3,3	0,28	0,13	бетон
25	6,3	3,4	0,29	0,14	бетон
26	6,5	3,5	0,30	0,15	бетон
27	6,7	3,6	0,31	0,16	бетон
28	6,9	3,7	0,32	0,17	бетон
29	7,1	3,8	0,33	0,18	бетон
30	7,3	3,9	0,34	0,19	бетон

Т а б л и ц а 1.3

Исходные данные для расчёта прямоугольной пластинки

Вариант	$a, \text{ см}$	$b, \text{ см}$	$q_0, \text{ МПа}$	$\mu$	$[\sigma], \text{ МПа}$
1	110	60	1,1	0,25	150
2	120	70	1,2	0,25	150
3	130	80	1,3	0,25	150
4	140	90	1,4	0,25	150
5	150	100	1,5	0,25	150
6	160	110	1,6	0,3	160
7	170	120	1,7	0,3	160
8	180	130	1,8	0,3	160
9	190	140	1,9	0,3	160
10	200	150	2,0	0,3	160
11	210	160	2,1	0,35	170
12	220	170	2,2	0,35	170
13	230	180	2,3	0,35	170
14	240	190	2,4	0,35	170
15	250	200	2,5	0,35	170

## Глава 2. Решение дифференциальных уравнений пластин с использованием разрывных функций

В данной главе рассматриваются аналитические методы, основанные на использовании разрывных функций, что позволяет получать решения задач по исследованию напряженно-деформированного состояния пластин достаточно эффективным и быстрым путём.

### 2.1 Интегрирование выражений, содержащих разрывные функции

В случаях действия на пластину сосредоточенных усилий  $F$ , нагрузок интенсивности  $q$ , распределённых по части пластинки, например, по кольцевой поверхности пластины или по сектору, удобно проводить расчёт с использованием разрывных функций.

Чаще всего для этой цели используются: единичная функция (Хевисайда)  $H(x-a)$ , дельта-функция (Дирака)  $\delta(x-a)$  и её производные [2, 3, 6, 7].

### 2.1.1 Единичная функция

По определению *одномерная единичная функция* имеет следующий вид:

$$H(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ 1 & \text{при } x > a. \end{cases} \quad (2.1)$$

В точке  $x = a$  функция  $H(x-a)$  не определена.

Аналогично определяются *единичные функции от радиальной и окружной координат*:

$$H(r-a) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < a; \\ 1 & \text{при } r > a, \end{cases}$$
$$H(\varphi - \varphi_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi < \varphi_0; \\ 1 & \text{при } \varphi > \varphi_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Неопределенный интеграл от произведения единичной функции на какую-либо непрерывную на рассматриваемом промежутке функцию  $\varphi(x)$  определяется таким образом:

$$\int H(x-a) \varphi(x) dx = H(x-a) \int_a^x \varphi(x) dx + C, \quad (2.3)$$

где  $C$  – произвольная постоянная интегрирования.

Аналогично вводится *единичная функция двух переменных*

$$H(x-a, y-b) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \quad y < b; \\ 1 & \text{при } x > a, \quad y > b. \end{cases} \quad (2.4)$$

Функция (2.4) показана на рис. 2.1, где в заштрихованной области  $H(x-a, y-b) = 1$ .

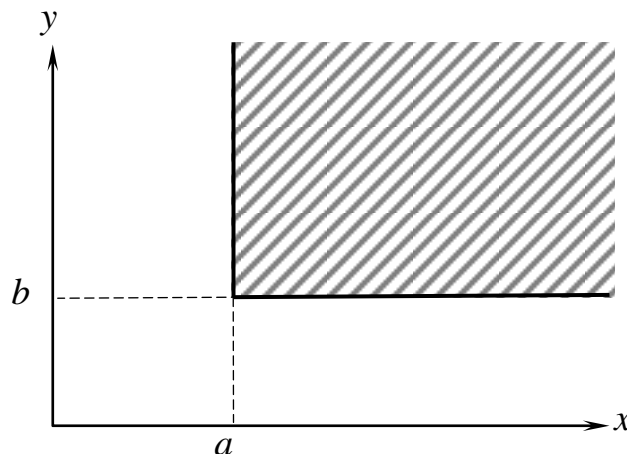


Рис. 2.1. Единичная функция двух переменных

Поэтому, если функция  $Q(x, y)$  непрерывна на рассматриваемом промежутке, то

$$\begin{aligned} & H(x-a, y-b) Q(x, y) dx dy = \\ & = H(x-a, y-b) \int_b^y \left[ \int_a^x Q(x, y) dx \right] dy. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В формуле (52.5) опущены функции, зависящие от  $y$  и  $x$ , появляющиеся при интегрировании.

### 2.1.2 Дельта-функция и её производные

*Дельта-функция* может быть определена следующим образом:

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq a; \\ \infty & \text{при } x = a. \end{cases} \quad (2.6)$$

При этом дельта-функции определяется соотношением [1]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) dx = 1. \quad (2.7)$$

С другой стороны

$$\frac{\partial H(x-a)}{\partial x} = \delta(x-a), \quad (2.8)$$

то есть *производная от единичной функции равняется дельта-функции*.

Интегрируя уравнение (2.8) получим важную формулу

$$\int \delta(x-a) dx = H(x-a) + C, \quad (2.9)$$

где  $C$  – произвольная постоянная интегрирования.

Кроме того, дельта-функция обладает так называемым *фильтрующим свойством*:

$$f(x) \delta(x-a) = f(a) \delta(x-a), \quad (2.10)$$

где  $f(x)$  – некоторая непрерывная на рассматриваемом промежутке функция.

Учитывая соотношения (2.9) и (2.10), получим

$$\int f(x) \delta(x-a) dx = H(x-a) f(a) + C. \quad (2.11)$$

Соотношение (2.11) позволяет интегрировать выражения, содержащие дельта-функцию. Аналогично можно построить *фильтрующее свойство первой производной от дельта-функции*

$$f(x) \delta'(x-a) = f(a) \delta'(x-a) - f'(a) \delta(x-a), \quad (2.12)$$

поэтому

$$\int f(x) \delta'(x-a) dx = f(a) \delta(x-a) - f'(a) H(x-a). \quad (2.13)$$

Дельта-функция может быть использована в том случае, если в точке с координатами  $x_0$  и  $y_0$ , приложена сосредоточенная сила  $F$ . Тогда в исходном уравнении равновесия (обращаем на это особое внимание) всех сил на ось  $z$  вместо  $q$  необходимо ввести выражение  $F \cdot \delta(x-x_0, y-y_0)$ , то есть произвести замену

$$q \rightarrow F \cdot \delta(x-x_0, y-y_0) = F \cdot \delta(x-x_0) \cdot \delta(y-y_0). \quad (2.14)$$

В полярной системе координат получим

$$q \rightarrow F \cdot \frac{\delta(r-r_0)}{r} \cdot \delta(\varphi-\varphi_0), \quad (2.15)$$

где  $r_0$  и  $\varphi_0$  координаты точки приложения силы  $F$ .

**Примечание.** Если величина  $q$  была заменена на  $F$  по формулам (2.14) или (2.15), но не в исходном уравнении равновесия, а в каком-либо уже преобразованном уравнении, это может привести к грубым ошибкам.

Аналогично, если в точке с координатами  $x_0$  и  $y_0$  приложен сосредоточенный момент  $M$ , действующий в плоскости параллельной оси  $x$ , то в исходном уравнении равновесия замена производится по схеме

$$q \rightarrow M \cdot \frac{\partial \delta(x-x_0)}{\partial x} \cdot \delta(y-y_0). \quad (2.16)$$

Аналогично с учётом введения производной по  $y$  производится замена

$$q \rightarrow M \cdot \delta(x-x_0) \cdot \frac{\partial \delta(y-y_0)}{\partial y}. \quad (2.17)$$

Если на круглую пластинку на радиусе  $r=r_0$  действует погонная кольцевая нагрузка  $F$ , то замена производится по формуле

$$q \rightarrow F \cdot \delta(r-r_0). \quad (2.18)$$

Если же на радиусе  $r=r_0$  действует погонный кольцевой радиальный момент  $M$ , то следует использовать формулу

$$q \rightarrow M \cdot \frac{\partial}{\partial r} \delta(r-r_0). \quad (2.19)$$

## 2.2 Общая схема решения дифференциальных уравнений изгиба круглых изотропных пластин с использованием разрывных функций

В качестве исходных принимаются уравнения равновесия пластинки и уравнения, связывающие функции усилий и перемещения. В результате



совместного решения этих уравнений получается *разрешающее дифференциальное уравнение* четвёртого порядка в частных производных. Такое уравнение для круглой изотропной пластинки представлено в форме (1.24) [7, 8].

Поскольку здесь рассматриваются круглые пластинки, замкнутые в окружном направлении, то, используя условие периодичности всех функций, определяющих напряжённо-деформированное состояние пластинки, исходное дифференциальное уравнение путём разложения по косинусам или по синусам в ряд Фурье сводится к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений по радиальной координате  $r$ .

Тогда общее решение задачи складывается из его отдельных решений, соответствующих каждому из возможных при заданном нагружении и заданных условиях закрепления пластинки типов деформаций. Это могут быть осесимметричная, кососимметричная и циклически симметричные составляющие деформации (здесь будем рассматривать только осесимметричные деформации). Любое из этих решений может быть определено из дифференциального уравнения следующего вида:

$$\nabla^2 \nabla^2 w_m = \frac{q_m}{D}, \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (2.20)$$

где  $\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}$  – оператор Лапласа в полярных координатах относительно прогиба;  $m$  – параметр, определяющий тип деформации пластинки.

Однако для осесимметричных деформаций круглой изотропной пластинки с  $D = const$  разрешающее дифференциальное уравнение может иметь третий порядок и тогда будет записано в следующей форме:

$$\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = \frac{Q_1}{D}, \quad (2.21)$$

где  $Q_1$  – радиальная перерезывающая сила.

Для нахождения частного решения полученного обыкновенного дифференциального уравнения, правая часть которого содержит единичную функцию или дельта-функцию, предварительно необходимо его левую часть представить в виде единого дифференциального оператора.

Для этого строится общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения и, с помощью его последовательного дифференцирования, исключаются из его правой части все функции, образующие это решение [7].

Построенное для каждой из гармоник общее решение складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения, и частного решения неоднородного дифференциального уравнения, содержащего единичную функцию.

### 2.3 Круглая изотропная пластинка под действием равномерно распределённой нагрузки

Рассмотрим круглую изотропную пластинку с радиусом наружного контура равным  $a$ , радиусом опорного контура  $b$  и нагруженную равномерно распределённой нагрузкой интенсивности  $q$ . Очевидно, что деформации такой пластинки будут осесимметричными (рис. 2.2).

Если же, например, пластинка расположена на точечных опорах, находящихся на одной окружности и равноудалённых друг от друга и её центра (рис. 2.2), то помимо осесимметричных деформаций необходимо также учесть циклически симметричные деформации с номерами  $m$ , кратными количеству опор.

Так для пластинки, расположенной на трёх точечных опорах, среди циклически симметричных деформаций останутся лишь гармоники кратные трём, то есть  $m = 3, 6, 9, 12, \dots$

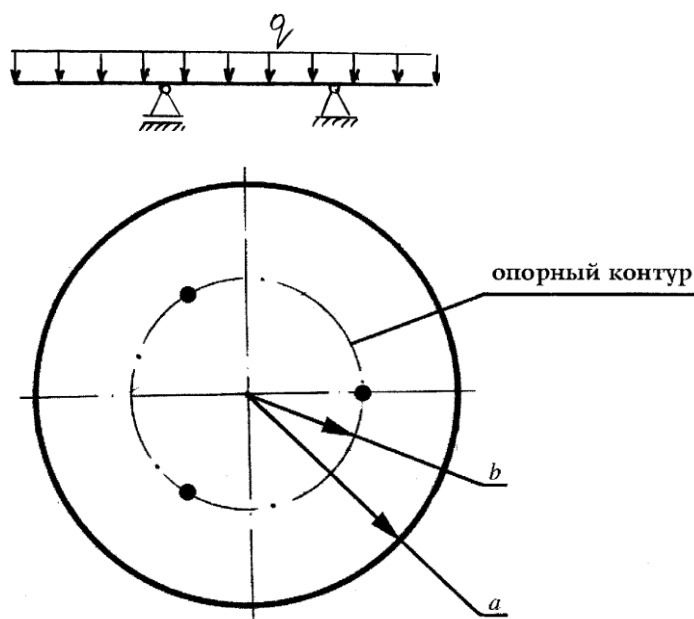


Рис. 2.2. Расчётная схема пластинки

Ниже будем рассматривать только осесимметричное деформирование круглой пластинки.

Для построения решения в правой части разрешающих дифференциальных уравнений осесимметричных деформаций должны

быть учтены составляющие реакций опор, которые для осесимметричных деформаций выражаются через единичную функцию.

В этом случае из уравнения (2.21) получим

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dW_0}{dr} \right) \right] = \frac{qr}{2D} - H(r-b) \frac{qa^2}{2Dr}, \quad (2.22)$$

где первое слагаемое в правой части учитывает действие внешней нагрузки  $q$ , а второе слагаемое учитывает поперечную силу, возникающую от действия реакций опор, при этом левая часть дифференциального уравнения представлена в виде единого дифференциального оператора [7].

Последовательно интегрируя дифференциальное уравнение (2.22) получим:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw_0}{dr} \right) = \frac{qr^2}{4D} - H(r-b) \frac{qa^2}{2D} \ln \frac{r}{b} + C_1;$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dw_0}{dr} \right) = \frac{qr^3}{4D} - H(r-b) \frac{qa^2}{2D} r \ln \frac{r}{b} + C_1 r;$$

$$r \frac{dw_0}{dr} = \frac{qr^4}{16D} - H(r-b) \frac{qa^2}{2D} \left[ \frac{r^2}{2} \left( \ln \frac{r}{b} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \right) \right] + C_1 \frac{r^2}{2} + C_2;$$

выражение для угла поворота

$$\frac{dw_0}{dr} = C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r} + \frac{q}{2D} \left\{ \frac{r^3}{8} - H(r-b) a^2 \left[ \frac{r}{2} \left( \ln \frac{r}{b} - \frac{1}{2} \right) + \frac{b^2}{4r} \right] \right\}; \quad (2.23)$$

выражение для прогибов

$$w_0 = C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3 + \frac{q}{8D} \left\{ \frac{r^4}{8} - H(r-b) a^2 b^2 \left[ \left( 1 + \frac{r^2}{b^2} \right) \ln \frac{r}{b} + \left( 1 - \frac{r^2}{b^2} \right) \right] \right\}. \quad (2.24)$$

Произвольная постоянная интегрирования  $C_2$  положена равной нулю, поскольку для пластины, не имеющей центрального отверстия, при  $r = 0$  перемещения должны быть конечными.

Учитывая соотношения теории упругости, связывающие компоненты усилий с компонентами упругого перемещения получаем выражения для изгибающих моментов в радиальном и окружном направлениях [1, 3-5, 9]:

$$M_1 = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right);$$

$$M_2 = -D \left( \mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right).$$

Тогда уравнения для изгибающих моментов (при  $m = 0$ ) получим в следующем виде:

$$M_{1,0} = C_1 \frac{1+\mu}{2} +$$

$$+ \frac{q}{D} \left\{ \frac{3+\mu}{16} r^2 - H(r-b) \frac{a^2}{4} \left[ \frac{1-\mu}{2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + (1+\mu) \ln \frac{r}{b} \right] \right\};$$

$$M_{2,0} = C_1 \frac{1+\mu}{2} +$$

$$+ \frac{q}{D} \left\{ \frac{3\mu+1}{16} r^2 - H(r-b) \frac{a^2}{4} \left[ \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 \right) + (1+\mu) \ln \frac{r}{b} \right] \right\}.$$

В качестве граничных условий принимаем следующие:  
прогиб на опоре равен нулю  $w(b) = 0$ ;  
изгибающие моменты в радиальном направлении на наружном контуре  
равны нулю  $M_1(a) = 0$ .

Используя эти граничные условия определяем постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_3$ :

$$C_1 = -\frac{q}{D} \frac{a^2}{2(1+\mu)} A;$$

$$C_3 = \frac{q}{D} \frac{a^2 b^2}{8(1+\mu)} \left( A - \frac{b^2}{a^2} \frac{1+\mu}{8} \right),$$

где

$$A = \frac{3+\mu}{4} - \left[ (1+\mu) \ln \frac{a}{b} + \frac{1-\mu}{2} \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \right].$$

Тогда формулы для определения осесимметричных составляющих прогиба, а также составляющие изгибающих моментов в радиальном и окружном направлениях (при  $m = 0$ ) можно записать следующим образом:

$$w_0 = \frac{qa^4}{D} w_0^*; \quad M_{1,0} = qa^2 M_{1,0}^*; \quad M_{2,0} = qa^2 M_{2,0}^*;$$

$$w_0^* = \frac{1}{32} \left\{ \frac{1}{1+\mu} \left( 1 - \frac{r^2}{b^2} \right) A + \frac{1}{8} \frac{r^2}{a^2} \left( \frac{r^2}{b^2} - \frac{b^2}{r^2} \right) - \right.$$

$$\left. - H(r-b) \left[ \ln \frac{r}{b} \left( 1 + \frac{r^2}{b^2} \right) + \left( 1 - \frac{r^2}{b^2} \right) \right] \right\};$$

$$M_{1,0}^* = \frac{1}{4} \left\{ A - \frac{3+\mu}{4} \frac{r^2}{a^2} + H(r-b) \left[ \frac{1-\mu}{2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + (1+\mu) \ln \frac{r}{b} \right] \right\};$$

$$M_{2,0}^* = \frac{1}{4} \left\{ A - \frac{3+\mu}{4} \frac{r^2}{a^2} + H(r-b) \left[ \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 \right) + (1+\mu) \ln \frac{r}{b} \right] \right\},$$

где  $w_0^*$ ,  $M_{1,0}^*$  и  $M_{2,0}^*$  – осесимметричные составляющие прогиба и изгибающие моменты (при  $m=0$ ), записанные в безразмерных величинах.

В табл. 2.1 приведены значения  $w_0^*$ ,  $M_{1,0}^*$  и  $M_{2,0}^*$  для круглой пластинки при  $a=2b$ .

Т а б л и ц а 2.1

Результаты расчёта прогибов и изгибающих моментов при  $a=2b$

$\frac{r}{a}$	$w_0^*$	$M_{1,0}^*$	$M_{2,0}^*$
0	$8,139214 \cdot 10^{-3}$	$-8,4647825 \cdot 10^{-2}$	$-8,4647825 \cdot 10^{-2}$
0,2	$7,788527 \cdot 10^{-3}$	$-9,2897825 \cdot 10^{-2}$	$-8,9397825 \cdot 10^{-2}$
0,4	$3,506679 \cdot 10^{-3}$	$-1,1764782 \cdot 10^{-1}$	$-1,0364782 \cdot 10^{-1}$
0,5	0	---	---
0,6	$-4,477673 \cdot 10^{-3}$	$-7,2907207 \cdot 10^{-2}$	$-9,4879437 \cdot 10^{-2}$
0,8	$-1,458371 \cdot 10^{-2}$	$-1,0576337 \cdot 10^{-2}$	$-6,1216962 \cdot 10^{-2}$
1,0	$-2,451183 \cdot 10^{-2}$	0	$-4,3749995 \cdot 10^{-2}$

## 2.4 Круглая изотропная пластинка под действием кольцевой нагрузки

Рассмотрим пластинку, изображённую на рис. 2.3. Опорный контур пластинки расположен на окружности  $r = a$ . По кольцевой поверхности  $c \leq r \leq b$  на пластинку действует распределённая нагрузка интенсивностью  $q$ .

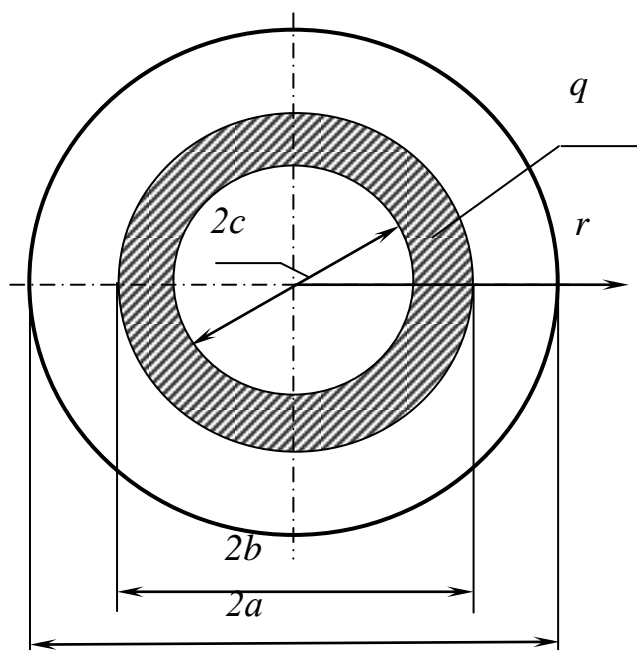


Рис. 2.3. Круглая пластинка под действием кольцевой нагрузки

В радиальном направлении такой пластинки при переходе от одного силового участка к другому поперечная сила меняется скачкообразно. По этой причине для решения такого класса задач целесообразно использовать методы, основанные на применении разрывных функций, так как в этом случае решение строится с помощью непосредственного интегрирования исходных дифференциальных уравнений, не разрезая пластинку на отдельные элементы, которые в дальнейшем было бы необходимо сопрягать по статическим и кинематическим характеристикам.

Используя понятие единичной функции (п.2.1.1), определим закон изменения поперечной силы  $Q_1$  в зависимости от радиальной координаты  $r$ . Для этого рассмотрим равновесие пластинки на трёх участках:

- 1)  $0 \leq r \leq c$ ;
- 2)  $c \leq r \leq b$ ;
- 3)  $b \leq r \leq a$ .

На участке  $0 \leq r \leq c$  внешняя нагрузка  $q$  отсутствует, поэтому поперечная сила  $Q_1$  равняется нулю, то есть имеем

$$Q_1^I(r) = 0. \quad (2.25)$$

В произвольном кольцевом сечении на участке  $c \leq r \leq b$  уравнение равновесия по направлению вертикальной оси примет вид

$$Q_1^{II}(r) = \frac{P(r)}{l(r)} = \frac{q\pi (r^2 - c^2)}{2\pi r} = \frac{qr}{2} \left(1 - \frac{c^2}{r^2}\right), \quad (2.26)$$

где  $q\pi(r^2 - c^2)$  – суммарная вертикальная нагрузка, действующая на кольцо с радиусами  $c$  и  $r$ ;  $l(r) = 2\pi r$  – длина окружности, на которой определяется поперечная сила. Напомним, что поперечной силой является сила, отнесённая к единице длины рассматриваемого сечения.

В произвольном кольцевом сечении на участке  $b \leq r \leq a$  по аналогии с построением формулы (2.26) получим

$$Q_1^{III}(r) = \frac{q\pi (b^2 - c^2)}{2\pi r} = \frac{qr}{2} \left(\frac{b^2}{r^2} - \frac{c^2}{r^2}\right). \quad (2.27)$$

Объединяя все три значения поперечной силы, будем иметь

$$Q_1 = \frac{qr}{2} \left[ H(r-c) \left(1 - \frac{c^2}{r^2}\right) - H(r-b) \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \right], \quad (2.28)$$

где  $H(r-c)$  и  $H(r-b)$  – единичные функции.

Нетрудно убедиться, используя свойства единичной функции, что формула (2.28) удовлетворяет условиям (2.25), (2.26) и (2.27).

Тогда разрешающее дифференциальное уравнение осесимметричных деформаций запишем в виде:

$$\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = \frac{Q_1}{D},$$

где поперечная сила  $Q$  определяется по формуле (2.28).

Учитывая, что левая часть дифференциального уравнения (2.21) есть дифференциальное уравнение Эйлера и его всегда можно представить в виде единого дифференциального оператора следующего вида:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right], \quad (2.29)$$

то с учётом соотношения (2.28) расчётное дифференциальное уравнение для круглой пластинки, находящейся под действием кольцевой нагрузки интенсивностью  $q$  можно представить в такой форме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] &= \\ &= \frac{qr}{2D} \left[ H(r-c) \left( 1 - \frac{c^2}{r^2} \right) - H(r-b) \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Решение этого дифференциального уравнения находится при помощи его последовательного интегрирования.

С учётом формулы (2.3), определяющей интегрирование выражений, содержащих единичную функцию, первое интегрирование уравнения (2.30) даёт

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dW}{dr} \right) &= \frac{q}{2D} \left[ H(r-c) \int \left( r - \frac{c^2}{r} \right) dr - H(r-b) \int \left( r - \frac{b^2}{r} \right) dr \right] + C_1 = \\ &= \frac{q}{2D} \left[ H(r-c) \left( \frac{r^2}{2} - c^2 \ln r \right)_c^r - H(r-b) \left( \frac{r^2}{2} - b^2 \ln r \right)_b^r \right] + C_1 = \\ &= \frac{q r^2}{2D} \left\{ H(r-c) \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c^2}{a^2} \right) - \frac{c^2}{r^2} \ln \frac{r}{c} \right] - \right. \\ &\quad \left. - H(r-b) \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{b^2}{r^2} \ln \frac{r}{b} \right] \right\} + C_1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Последовательно интегрируя соотношение (2.31), получим формулы для определения угла поворота  $\theta$  и прогиба  $w$  пластинки. Здесь приводится лишь конечный результат интегрирования, так как выполнение промежуточных операций достаточно ясно из процесса построения формулы (76).

Выражение для угла поворота:

$$\begin{aligned} \theta = \frac{dw}{dr} &= \frac{qr^3}{2D} \left\{ H(r-c) \left[ \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{c^4}{r^4} \right) - \frac{1}{2} \frac{c^2}{r^2} \ln \frac{r}{c} \right] - \right. \\ &\quad \left. - H(r-b) \left[ \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{b^4}{r^4} \right) - \frac{1}{2} \frac{b^2}{r^2} \ln \frac{r}{b} \right] \right\} + \frac{C_1 r}{2} + C_2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Выражение для прогиба:

$$w = \frac{qr^4}{2D} \left\{ H(r-c) \left[ \left( \frac{1}{32} + \frac{1}{8} \frac{c^2}{r^2} - \frac{5}{32} \frac{c^4}{r^4} \right) - \frac{1}{8} \frac{c^2}{r^2} \ln \frac{r}{c} \left( \frac{c^2}{r^2} + 2 \right) \right] - \right.$$



$$\begin{aligned}
& -H(r-b) \left[ \left( \frac{1}{32} + \frac{1}{8} \frac{b^2}{r^2} - \frac{5}{32} \frac{b^4}{r^4} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{8} \frac{b^2}{r^2} \ln \frac{r}{b} \left( \frac{b^2}{r^2} + 2 \right) \right] \Bigg\} + \frac{C_1}{4} r^2 + C_2 \ln r + C_3.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Не останавливаясь на процессе вычисления второй производной от прогиба, построим формулы для определения изгибающих моментов в радиальном  $M_1$  и окружном  $M_2$  направлениях пластинки, используя для этого соотношения:

$$\begin{aligned}
M_1 &= -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right); \\
M_2 &= -D \left( \mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right).
\end{aligned}$$

Это даёт

$$\begin{aligned}
M_1 &= -\frac{qr^2}{2} \left\{ H(r-c) \left( \frac{3+\mu}{8} + \frac{1-\mu}{8} \frac{c^4}{r^4} - \frac{1+\mu}{2} \frac{c^2}{r^2} \ln \frac{r}{c} - \frac{1}{2} \frac{c^2}{r^2} \right) - \right. \\
& - H(r-b) \left( \frac{3+\mu}{8} + \frac{1-\mu}{8} \frac{b^4}{r^4} - \frac{1+\mu}{2} \frac{b^2}{r^2} \ln \frac{r}{b} - \frac{1}{2} \frac{b^2}{r^2} \right) \Bigg\} - \\
& - \frac{(1+\mu) C_1 D}{2};
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
M_2 &= -\frac{qr^2}{2} \left\{ H(r-c) \left( \frac{1+3\mu}{8} - \frac{1-\mu}{8} \frac{c^4}{r^4} - \frac{1+\mu}{2} \frac{c^2}{r^2} \ln \frac{r}{c} - \frac{\mu}{2} \frac{c^2}{r^2} \right) - \right. \\
& - H(r-b) \left( \frac{1+3\mu}{8} - \frac{1-\mu}{8} \frac{b^4}{r^4} - \frac{1+\mu}{2} \frac{b^2}{r^2} \ln \frac{r}{b} - \frac{\mu}{2} \frac{b^2}{r^2} \right) \Bigg\} - \\
& - \frac{(1+\mu) C_1 D}{2}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

**Примечания:**

1. Если координата  $c = 0$ , то  $H(r-c) = 1$ ,  
если  $b = a$ , то  $H(r-b) = 0$ .

2. Если пластинка не имеет отверстия в центре, то есть при  $r = 0$ , то в силу ограниченности прогиба в центре должно быть  $C_2 = 0$ , что следует из формулы (2.33).

#### 2.4.1 Пластинка, не имеющая отверстия в центре и шарнирно опёртая по наружному контуру

Для пластинки шарнирно опёртой по наружному контуру и не имеющей отверстия в центре, должно быть

$$C_2 = 0, \quad w(a) = M_1(a) = 0. \quad (2.36)$$

Так как на наружном контуре пластинки, то есть при  $r = a$

$$H(r - c) = H(r - b) = 1,$$

то из условия  $M_1(a) = 0$  получим

$$C_1 = -\frac{qa^2}{D(1+\mu)} \left[ \frac{1-\mu}{8} \left( \frac{c^4}{a^4} - \frac{b^4}{a^4} \right) + \frac{1+\mu}{2} \left( \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} - \frac{c^2}{a^2} \ln \frac{a}{c} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} \right) \right]. \quad (2.37)$$

Условие  $w(a) = 0$  запишется в таком виде:

$$w(a) = \frac{qa^4}{16D} \times \left[ \left( \frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{5}{4} \left( \frac{b^4}{a^4} - \frac{c^4}{a^4} \right) + \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} \left( \frac{b^2}{a^2} + 2 \right) - \frac{c^2}{a^2} \ln \frac{a}{c} \left( \frac{c^2}{a^2} + 2 \right) \right] + C_1 \frac{a^2}{4} + C_3 = 0. \quad (2.38)$$

Отсюда окончательно будем иметь

$$C_3 = -\frac{C_1}{4} a^2 - \frac{qa^4}{16D} \times \left[ \left( \frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{5}{4} \left( \frac{b^4}{a^4} - \frac{c^4}{a^4} \right) + \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} \left( \frac{b^2}{a^2} + 2 \right) - \frac{c^2}{a^2} \ln \frac{a}{c} \left( \frac{c^2}{a^2} + 2 \right) \right].$$

Следует отметить, что раскрывать значение постоянной интегрирования  $C_1$  в формуле (2.38) не имеет смысла.

Учитывая значения произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_3$ , прогиб пластинки можно записать следующим образом:

$$W(r) = \alpha(r) \frac{qa^4}{64D}, \quad (2.39)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(r) = & \frac{r^4}{a^4} \left\{ H(r-c) \left[ \left( 1 + 4 \frac{c^2}{r^2} - 5 \frac{c^4}{r^4} \right) - 4 \frac{c^2}{r^2} \ln \frac{r}{c} \left( \frac{c^2}{r^2} + 2 \right) \right] - \right. \\ & - H(r-b) \left[ \left( 1 + 4 \frac{b^2}{r^2} - 5 \frac{b^4}{r^4} \right) - \right. \\ & \left. \left. - 4 \frac{b^2}{r^2} \ln \frac{r}{b} \left( \frac{b^2}{r^2} + 2 \right) \right] \right\} + \frac{16}{1+\mu} \left( 1 + \frac{r^2}{a^2} \right) \times \\ & \times \left[ \frac{1-\mu}{8} \left( \frac{c^4}{a^4} - \frac{b^4}{a^4} \right) + \frac{1+\mu}{2} \left( \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} - \frac{c^2}{a^2} \ln \frac{a}{c} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} \right) \right] - \\ & - 4 \left[ \left( \frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{5}{4} \left( \frac{b^4}{a^4} - \frac{c^4}{a^4} \right) + \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} \left( \frac{b^2}{a^2} + 2 \right) - \frac{c^2}{a^2} \ln \frac{a}{c} \left( \frac{c^2}{a^2} + 2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Аналогично с учётом соотношений (2.34) и (2.35) изгибающие моменты  $M_1$  и  $M_2$  можно представить в такой форме:

$$M_1 = \beta(r) qa^2, \quad (2.40)$$

где

$$\begin{aligned} \beta(r) = & -\frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} \left\{ H(r-c) \left( \frac{3+\mu}{8} + \frac{1-\mu}{8} \frac{c^4}{r^4} - \frac{1+\mu}{2} \frac{c^2}{r^2} \ln \frac{r}{c} - \frac{1}{2} \frac{c^2}{r^2} \right) - \right. \\ & \left. - H(r-b) \left( \frac{3+\mu}{8} + \frac{1-\mu}{8} \frac{b^4}{r^4} - \frac{1+\mu}{2} \frac{b^2}{r^2} \ln \frac{r}{b} - \frac{1}{2} \frac{b^2}{r^2} \right) \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{1-\mu}{8} \left( \frac{c^4}{a^4} - \frac{b^4}{a^4} \right) + \frac{1+\mu}{2} \left( \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} - \frac{c^2}{a^2} \ln \frac{a}{c} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$M_2 = \gamma(r) qa^2, \quad (2.41)$$

где

$$\gamma(r) = -\frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} \left\{ H(r-c) \left( \frac{1+3\mu}{8} - \frac{1-\mu}{8} \frac{c^4}{r^4} - \frac{1+\mu}{2} \frac{c^2}{r^2} \ln \frac{r}{c} - \frac{\mu}{2} \frac{c^2}{r^2} \right) - \right.$$

$$-H(r-b) \left( \frac{1+3\mu}{8} - \frac{1-\mu}{8} \frac{b^4}{r^4} + \frac{1+\mu}{2} \frac{b^2}{r^2} \ln \frac{r}{b} - \frac{\mu}{2} \frac{b^2}{r^2} \right) \Bigg\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \frac{1-\mu}{8} \left( \frac{c^4}{a^4} - \frac{b^4}{a^4} \right) + \frac{1+\mu}{2} \left( \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} - \frac{c^2}{a^2} \ln \frac{a}{c} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} \right) \right].$$

При этом

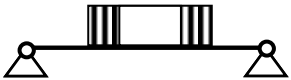

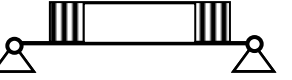
$$\gamma(a) = \frac{1-\mu}{4} \left[ \left( \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} \right) - \left( \frac{b^4}{a^4} - \frac{c^4}{a^4} \right) \right] \quad \text{при } b < a,$$

$$\gamma(a) = -\frac{1+3\mu}{16} - \frac{1-\mu}{16} \left( 1 - 2 \frac{c^4}{a^4} \right) + \frac{1}{4} - \frac{1-\mu}{4} \frac{c^2}{a^2} \quad \text{при } b = a.$$

В табл. 2.2 приведены значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  при следующих значениях отношений  $c/a$  и  $b/a$ : 1) 0,25; 0,50; 2) 0,25; 0,75; 3) 0,50; 0,75. Коэффициент Пуассона материала пластинки  $\mu = 0,3$ .

Т а б л и ц а 2.2

Значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  при различных отношениях  $c/a$  и  $b/a$

п/п	Схема 1			Схема 2			Схема 3		
	$c = 0,25a,$ $b = 0,50a$			$c = 0,25a,$ $b = 0,75a$			$c = 0,50a$ $b = 0,75a$		
									
$r/a$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
0	1,3952	0,0725	0,0725	2,8352	0,1358	0,1358	1,4400	0,0633	0,0633
0,25	1,2800	0,0725	0,0725	2,6240	0,1358	0,1358	1,3440	0,0633	0,0633
0,50	0,9600	0,0500	0,0622	2,0056	0,1132	0,1255	1,0496	0,0633	0,0633
0,75	0,4928	0,0195	0,0432	1,0624	0,0574	0,0962	0,5696	0,0378	0,0530
1,00	0	0	0,0276	0	0	0,0602	0	0	0,0325

Для сравнения укажем, что для круглой пластинки, шарнирно опёртой по наружному контуру и по всей поверхности нагруженной равномерным давлением интенсивностью  $q$ :  $\alpha_{\max} = 4,0769$ ;  $\beta_{\max} = \gamma_{\max} = 0,2062$ ;  $\gamma_{\min} = 0,0875$ .

## 2.4.2 Пластинка, не имеющая отверстия в центре и защемлённая по наружному контуру

В этом случае (см. рис. 2.3) граничные условия имеют вид:

$$w(a) = \theta(a) = 0.$$

Поскольку  $C_2 = 0$ , из формулы (2.32) сразу получим

$$C_1 = -\frac{qa^2}{D} \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{b^4}{a^4} - \frac{c^4}{a^4} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} - \frac{c^2}{a^2} \ln \frac{a}{c} \right) \right]. \quad (2.42)$$

Формула (2.33) позволяет определить произвольную постоянную  $C_3$ .

Она равна

$$C_3 = -\frac{C_1}{4} a^2 - \frac{qa^4}{16D} \times \left[ \left( \frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{5}{4} \left( \frac{b^4}{a^4} - \frac{c^4}{a^4} \right) + \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} \left( \frac{b^2}{a^2} + 2 \right) - \frac{c^2}{a^2} \ln \frac{a}{c} \left( \frac{c^2}{a^2} + 2 \right) \right].$$

С учётом значений произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_3$  прогиб пластинки и её изгибающие моменты определяются по формулам:

$$W(r) = \delta(r) \frac{qa^4}{64D}, \quad (2.43)$$

где

$$\begin{aligned} \delta(r) = & \frac{r^4}{a^4} \left\{ H(r-c) \left[ \left( 1 + 4 \frac{c^2}{r^2} - 5 \frac{c^4}{r^4} \right) - 4 \frac{c^2}{r^2} \ln \frac{r}{c} \left( \frac{c^2}{r^2} + 2 \right) \right] - \right. \\ & \left. - H(r-b) \left[ \left( 1 + 4 \frac{b^2}{r^2} - 5 \frac{b^4}{r^4} \right) - 4 \frac{b^2}{r^2} \ln \frac{r}{b} \left( \frac{b^2}{r^2} + 2 \right) \right] \right\} + \\ & + 16 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{b^4}{a^4} - \frac{c^4}{a^4} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} - \frac{c^2}{a^2} \ln \frac{a}{c} \right) \right] - \\ & - 4 \left[ \left( \frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{5}{4} \left( \frac{b^4}{a^4} - \frac{c^4}{a^4} \right) + \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} \left( \frac{b^2}{a^2} + 2 \right) - \frac{c^2}{a^2} \ln \frac{a}{c} \left( \frac{c^2}{a^2} + 2 \right) \right]; \end{aligned}$$

$$M_1 = f(r) qa^2, \quad (2.44)$$

где

$$f(r) = -\frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} \left\{ H(r-c) \left( \frac{3+\mu}{8} + \frac{1-\mu}{8} \frac{c^4}{r^4} - \frac{1+\mu}{2} \frac{c^2}{r^2} \ln \frac{r}{c} - \frac{1}{2} \frac{c^2}{r^2} \right) - \right. \\ \left. - H(r-b) \left( \frac{3+\mu}{8} + \frac{1-\mu}{8} \frac{b^4}{r^4} - \frac{1+\mu}{2} \frac{b^2}{r^2} \ln \frac{r}{b} - \frac{1}{2} \frac{b^2}{r^2} \right) \right\} + \\ + \frac{1+\mu}{2} \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{b^4}{a^4} - \frac{c^4}{a^4} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} - \frac{c^2}{a^2} \ln \frac{a}{c} \right) \right];$$

$$M_2 = \varphi(r) qa^2, \quad (2.45)$$

где

$$\varphi(r) = -\frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} \left\{ H(r-c) \left( \frac{1+3\mu}{8} - \frac{1-\mu}{8} \frac{c^4}{r^4} - \frac{1+\mu}{2} \frac{c^2}{r^2} \ln \frac{r}{c} - \frac{\mu}{2} \frac{c^2}{r^2} \right) - \right. \\ \left. - H(r-b) \left( \frac{1+3\mu}{8} - \frac{1-\mu}{2} \frac{b^2}{r^2} \ln \frac{r}{b} - \frac{1+\mu}{8} \frac{b^4}{r^4} - \frac{\mu}{2} \frac{b^2}{r^2} \right) \right\} + \\ + \frac{1+\mu}{2} \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{b^4}{a^4} - \frac{c^4}{a^4} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} - \frac{c^2}{a^2} \ln \frac{a}{c} \right) \right].$$

Для заземлённой круглой пластинки коэффициент  $f(r)$  для радиального изгибающего момента на наружном контуре определяется по формулам:

$$M_1(a) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left( \frac{b^4}{a^4} - \frac{c^4}{a^4} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) & \text{при } b < a; \\ -\frac{1}{8} \left( 1 + \frac{c^4}{a^4} \right) + \frac{1}{4} \frac{c^2}{a^2} & \text{при } b = a. \end{cases} \quad (2.46)$$

Коэффициент  $\varphi(r)$ , определяющий величину окружного изгибающего момента, находится по формуле

$$\varphi(r) = \mu \cdot f(a). \quad (2.47)$$

### 2.4.3 Сравнительная оценка максимальных значений прогибов и изгибающих моментов для шарнирно опёртых и жестко защёмленных пластин

В табл. 2.3 приведены величины прогибов и изгибающих моментов в наиболее характерных точках круглой пластинки: в её центре ( $r = 0$ ) и на внешнем контуре ( $r = a$ ). При этом рассматривается действие постоянной кольцевой нагрузки интенсивности  $q$  для таких типоразмеров нагруженного кольца круглой пластинки:

$$1) c = 0, \quad b = \frac{a}{2}; \quad 2) c = \frac{a}{4}, \quad b = \frac{3}{4}a; \quad 3) c = \frac{a}{2}, \quad b = a,$$

где  $c$  и  $b$  – внутренний и наружный радиусы действующих кольцевых нагрузок.

Для сравнения и анализа полученных результатов в этой же таблице приводятся прогибы и изгибающие моменты для круглой пластинки, нагруженной по всей её поверхности, то есть для случая  $c = 0, b = a$ . Результаты расчётов показывают, что максимальные прогибы защемлённой пластинки значительно меньше прогибов шарнирно опёртой пластинки. Однако в зависимости от типа кольцевой нагрузки коэффициент уменьшения прогибов защемлённой пластинки по сравнению с шарнирно опёртой при одной и той же геометрии колец колеблется в пределах от 3 до 5.

В то же время максимальные изгибающие моменты для случая шарнирного опирания возникают в центре пластинки, то есть при  $r = 0$ , тогда как для защемленной пластинки в большинстве случаев – в заделке (за исключением случая  $c = 0, b = a/2$ ).


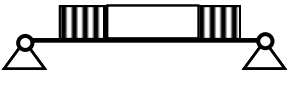
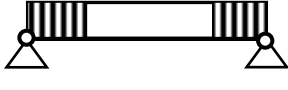


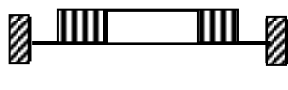


Существенно также, что радиальные изгибающие моменты  $M_1$  на опорном контуре шарнирно опёртой пластинки равны нулю, а в целом превышение изгибающих моментов для соответствующих точек шарнирно опёртых пластинок по сравнению с защемленными пластинками колеблется в пределах от 1,5 до 4,5.

В то же время превышение максимальных изгибающих моментов при шарнирном опирании меняется в незначительных пределах, от 1,5 до 1,75.

В заключение следует отметить, что использование формул (2.39) – (2.47) позволяет без труда исследовать напряжённо-деформированное состояние круглой пластинки, не имеющей центрального выреза, при любых видах кольцевой нагрузки.

Т а б л и ц а 2.3

Значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  при различных отношениях  $c/a$  и  $b/a$ 

Шарнирно опёртая пластинка						
№ п/п	$c$ и $b$	Схема	$\alpha_{\max} = \alpha(0)$	$\beta(0) = \gamma(0)$	$\beta(a)$	$\gamma(a)$
1	$c = 0,$ $b = \frac{a}{2}$		1,9854	0,1161	0	0,0328
2	$c = \frac{a}{4},$ $b = \frac{3}{4}a$		2,8352	0,1357	0	0,032
3	$c = \frac{a}{2},$ $b = a$		2,1002	0,0902	0	0,0552
4	$c = 0,$ $b = a$		4,0769	0,2060	0	0,880
Защемлённая пластинка						
№ п/п	$c$ и $b$	Схема	$\delta_{\max} = \delta(0)$	$f(0) = \varphi(0)$	$f(a)$	$\varphi(a)$
1	$c = 0,$ $b = \frac{a}{2}$		0,6391	0,0614	-0,0547	-0,0164
2	$c = \frac{a}{4},$ $b = \frac{3}{4}a$		0,7200	0,0498	-0,0860	-0,0258
3	$c = \frac{a}{2},$ $b = a$		0,3608	0,0199	-0,0703	-0,0211
4	$c = 0,$ $b = a$		1,0000	0,0810	-0,1250	-0,0380



## Библиографический список

1. Александров А.В. , Потапов В.Д. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности. /Учебник для строительных специальностей вузов. Изд. 2-е испр. – М.: Высшая школа, 2002. – 400 с.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. / М.: Наука – 1974. – 432 с.
3. Енгальчев С.А., Слепов Б.И. Задачи и расчётно-проектировочные работы по теории упругости и строительной механике пластин. / Учебное пособие. Л.: Ленинградский механический институт. 1983. – 85 с.
4. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалёва М.Л. Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщённых функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
5. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалёва М.Л. Численные и аналитические методы расчёта строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.
6. Михайлов Б.К. Пластинки и оболочки с разрывными параметрами. – Л.: ЛГУ. – 1980. – 196 с.
7. Соколов Е.В., Видюшенков С.А. Пластинки и оболочки вращения с разрывными грузовыми и жесткостными характеристиками / Монография. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 264 с.
8. Тимошенко С.П., Войновский – Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. – 636 с.
9. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Учебник для втузов. Изд. 14-е испр. / М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. – 592 с.

## Содержание

Введение.....	
<b>Глава 1. Изгиб тонких пластинок.....</b>	
1 Основные понятия и гипотезы.....	
2 Перемещения и деформации в пластине.....	
3 Напряжения и внутренние усилия в пластине.....	
4 Дифференциальные уравнения изгиба пластины.....	
5 Граничные условия.....	
6 Эллиптическая пластинка.....	
7 Круглая пластинка.....	
8 Прямоугольная пластинка.....	
9 Задачи для расчётно-проектировочных работ.....	
9.1 Изгиб эллиптической пластинки.....	
9.2 Изгиб круглой пластинки.....	
9.3 Изгиб прямоугольной пластинки.....	
<b>Глава 2. Решение дифференциальных уравнений пластин с использованием разрывных функций.....</b>	
2.1 Интегрирование выражений, содержащих разрывные функции.....	
2.1.1 Единичная функция.....	
2.1.2 Дельта-функция и её производные.....	
2.2 Общая схема решения дифференциальных уравнений изгиба круглых изотропных пластин с использованием разрывных функций.....	
2.3 Круглая изотропная пластинка под действием равномерно распределённой нагрузки.....	
2.4 Круглая изотропная пластинка под действием кольцевой нагрузки.....	
2.4.1 Пластинка шарнирно опёртая по наружному контуру.....	
2.4.2 Пластинка жёстко защемлённая по наружному контуру.....	
2.4.3 Сравнительная оценка максимальных значений прогибов и изгибающих моментов для шарнирно опёртых и жёстко защемлённых пластин.....	
Библиографический список.....	

Учебное издание

СМИРНОВ Владимир Игоревич  
ВИДЮШЕНКОВ Сергей Александрович

## **Изгиб пластинок**

Учебное пособие

Редактор и корректор *Н. В. Фролова*

Технический редактор *М. С. Савастеева*

Подписано в печать с оригинал-макета  
Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага для множ. апп. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 3,125. Тираж 200 экз.  
Заказ

Петербургский государственный университет путей сообщения.  
190031, СПб., Московский пр., 9.

Типография ПГУПС. 190031, СПб., Московский пр., 9